CS (Main) Exam,2019

SDF–U–MTH

गणित (प्रश्न-पत्र–I)

समय : तीन घण्टे

अधिकतम अंक : 250

प्रश्न-पत्र सम्बन्धी विशेष अनुदेश

(उत्तर देने के पूर्व निम्नलिखित निर्देशों को कृपया सावधानीपूर्वक पढ़ें)

इसमें **आठ** प्रश्न हैं जो दो खण्डों में विभाजित हैं तथा **हिन्दी** एवं **अंग्रेजी** दोनों में छपे हैं।

उम्मीदवार को कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं तथा बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम **एक** प्रश्न चुनकर **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

प्रत्येक प्रश्न/भाग के अंक उसके सामने दिए गए हैं।

प्रश्नों के उत्तर उसी माध्यम में लिखे जाने चाहिए, जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू० सी० ए०) पुस्तिका के मुखपृष्ठ पर अंकित निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए। उल्लिखित माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए।

जब तक उल्लिखित न हो, संकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त हैं।

प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी। यदि काटा नहीं हो, तो प्रश्न के उत्तर की गणना की जाएगी चाहे वह उत्तर अंशतः दिया गया हो। प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका में खाली छोड़ा हुआ पृष्ठ या उसके अंश को स्पष्ट रूप से काटा जाना चाहिए।

MATHEMATICS (PAPER–I)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 250

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

(Please read each of the following instructions carefully before attempting questions)

There are EIGHT questions divided in two Sections and printed both in HINDI and in ENGLISH.

Candidate has to attempt FIVE questions in all.

Question Nos. **1** and **5** are compulsory and out of the remaining, THREE are to be attempted choosing at least ONE question from each Section.

The number of marks carried by a question/part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in a medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless and otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meanings.

Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer Booklet must be clearly struck off.

खण्ड—A / SECTION—A

1. *(a)* माना कि $f:\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ एक संतत फलन है, जैसा कि

$$f(x)=\frac{\cos^2 x}{4x^2-\pi^2}, \quad 0 \le x < \frac{\pi}{2}$$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

Let $f:\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ be a continuous function such that

$$f(x)=\frac{\cos^2 x}{4x^2-\pi^2}, \quad 0 \le x < \frac{\pi}{2}$$

Find the value of $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. 10

(b) माना कि $f: D(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ एक फलन है और $(a, b) \in D$. अगर $f(x, y)$ बिंदु (a, b) पर संतत है, तो दर्शाइए कि फलन $f(x, b)$ और $f(a, y)$ क्रमशः $x = a$ और $y = b$ पर संतत हैं।

Let $f: D(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ be a function and $(a, b) \in D$. If $f(x, y)$ is continuous at (a, b), then show that the functions $f(x, b)$ and $f(a, y)$ are continuous at $x = a$ and at $y = b$ respectively. 10

(c) माना कि $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ एक रैखिक प्रतिचित्र है, जैसा कि $T(2, 1) = (5, 7)$ एवं $T(1, 2) = (3, 3)$. अगर A मानक आधारों e_1, e_2 के सापेक्ष T के संगत आव्यूह है, तो A की कोटि ज्ञात कीजिए।

Let $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ be a linear map such that $T(2, 1) = (5, 7)$ and $T(1, 2) = (3, 3)$. If A is the matrix corresponding to T with respect to the standard bases e_1, e_2, then find Rank (A). 10

(d) अगर

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{और} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

है, तो दर्शाइए कि $AB = 6I_3$. इस परिणाम का उपयोग करते हुए निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 5 \\ x - y &= 0 \\ 2x + y - z &= 1 \end{aligned}$$

If

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

then show that $AB = 6I_3$. Use this result to solve the following system of equations :

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 5 \\ x - y &= 0 \\ 2x + y - z &= 1 \end{aligned}$$

10

(e) दर्शाइए कि

$$\frac{x+1}{-3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{1} \quad \text{और} \quad \frac{x}{1} = \frac{y-7}{-3} = \frac{z+7}{2}$$

प्रतिच्छेदी रेखाएँ हैं। प्रतिच्छेद बिंदु के निर्देशांकों और उस समतल, जिसमें दोनों रेखाएँ हैं, का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Show that the lines

$$\frac{x+1}{-3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{1} \quad \text{and} \quad \frac{x}{1} = \frac{y-7}{-3} = \frac{z+7}{2}$$

intersect. Find the coordinates of the point of intersection and the equation of the plane containing them. 10

2. *(a)* क्या $f(x) = |\cos x| + |\sin x|$, $x = \frac{\pi}{2}$ पर अवकलनीय है? अगर आपका उत्तर हाँ है, तो $f(x)$ का अवकलज $x = \frac{\pi}{2}$ पर ज्ञात कीजिए। अगर आपका उत्तर ना है, तो अपने उत्तर का प्रमाण दीजिए।

Is $f(x) = |\cos x| + |\sin x|$ differentiable at $x = \frac{\pi}{2}$? If yes, then find its derivative at $x = \frac{\pi}{2}$. If no, then give a proof of it. 15

(b) माना कि A और B समान कोटि के दो लांबिक आव्यूह हैं तथा $\det A + \det B = 0$. दर्शाइए कि $A + B$ एक अव्युत्क्रमणीय (सिंगुलर) आव्यूह है।

Let A and B be two orthogonal matrices of same order and $\det A + \det B = 0$. Show that $A + B$ is a singular matrix. 15

(c) *(i)* समतल $x + 2y + 3z = 12$ निर्देशांक अक्षों को A, B, C पर प्रतिच्छेद करता है। त्रिभुज ABC के परिवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

(ii) सिद्ध कीजिए कि समतल $z = 0$ गोलक $x^2 + y^2 + z^2 = 11$ के अन्वालोपी शंकु, जिसका शीर्ष $(2, 4, 1)$ पर है, को एक समकोणीय अतिपरवलय पर प्रतिच्छेद करता है।

(i) The plane $x + 2y + 3z = 12$ cuts the axes of coordinates in A, B, C. Find the equations of the circle circumscribing the triangle ABC. 10

(ii) Prove that the plane $z = 0$ cuts the enveloping cone of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 11$ which has the vertex at $(2, 4, 1)$ in a rectangular hyperbola. 10

3. *(a)* फलन $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 6$ का अंतराल $[2, 3]$ पर अधिकतम और न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

Find the maximum and the minimum value of the function $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 6$ on the interval $[2, 3]$. 15

(b) सिद्ध कीजिए कि साधारणतः किसी एक बिंदु से परवलयज $x^2 + y^2 = 2az$ पर तीन अभिलंब बनाए जा सकते हैं, लेकिन अगर बिंदु सतह $27a(x^2 + y^2) + 8(a - z)^3 = 0$ पर स्थित है, तो इन तीन अभिलंबों में से दो अभिलंब एक ही हैं।

Prove that, in general, three normals can be drawn from a given point to the paraboloid $x^2 + y^2 = 2az$, but if the point lies on the surface

$$27a(x^2 + y^2) + 8(a - z)^3 = 0$$

then two of the three normals coincide. 15

(c) माना कि

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -8 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) आव्यूह A की कोटि ज्ञात कीजिए।

(ii) उपसमष्टि

$$V = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

की विमा ज्ञात कीजिए।

Let

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -8 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Find the rank of matrix A.

(ii) Find the dimension of the subspace

$$V = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

15+5=20

4. *(a)* कैले-हैमिल्टन प्रमेय का कथन लिखिए। इस प्रमेय का उपयोग करके A^{100} का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

State the Cayley-Hamilton theorem. Use this theorem to find A^{100}, where

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ 15

(b) बिंदु P से गुजरने वाली दीर्घवृत्तज

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

की अभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए और सिद्ध कीजिए कि अगर यह $4PG_3$ के समान है, जहाँ G_3 वह बिंदु है जहाँ P से गुजरने वाली अभिलंब जीवा xy-तल पर मिलती है, तो P शंकु

$$\frac{x^2}{a^6}(2c^2 - a^2) + \frac{y^2}{b^6}(2c^2 - b^2) + \frac{z^2}{c^4} = 0$$

पर स्थित है।

Find the length of the normal chord through a point P of the ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

and prove that if it is equal to $4PG_3$, where G_3 is the point where the normal chord through P meets the xy-plane, then P lies on the cone

$$\frac{x^2}{a^6}(2c^2 - a^2) + \frac{y^2}{b^6}(2c^2 - b^2) + \frac{z^2}{c^4} = 0$$ 15

(c) *(i)* अगर

$$u = \sin^{-1}\sqrt{\frac{x^{1/3} + y^{1/3}}{x^{1/2} + y^{1/2}}}$$

है, तो दर्शाइए कि $\sin^2 u$, x और y का $-\frac{1}{6}$ घातविशिष्ट समांगी फलन है। अतएव दर्शाइए कि

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\tan u}{12}\left(\frac{13}{12} + \frac{\tan^2 u}{12}\right)$$

(ii) जैकोबियन विधि का व्यवहार करते हुए दर्शाइए कि अगर $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ और $f(0) = 0$ है, तो

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

(i) If

$$u = \sin^{-1}\sqrt{\frac{x^{1/3}+y^{1/3}}{x^{1/2}+y^{1/2}}}$$

then show that $\sin^2 u$ is a homogeneous function of x and y of degree $-\frac{1}{6}$.

Hence show that

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\tan u}{12}\left(\frac{13}{12} + \frac{\tan^2 u}{12}\right)$$ 12

(ii) Using the Jacobian method, show that if $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ and $f(0) = 0$, then

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$ 8

खण्ड—B / SECTION—B

5. (a) अवकल समीकरण

$$(2y\sin x + 3y^4 \sin x\cos x)\,dx - (4y^3\cos^2 x + \cos x)\,dy = 0$$

को हल कीजिए।

Solve the differential equation

$$(2y\sin x + 3y^4 \sin x\cos x)\,dx - (4y^3\cos^2 x + \cos x)\,dy = 0$$ 10

(b) अवकल समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 3x^2e^{2x}\sin 2x$$

का पूर्ण हल ज्ञात कीजिए।

Determine the complete solution of the differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 3x^2e^{2x}\sin 2x$$ 10

(c) एक भारी एकसमान छड़ AB का एक सिरा एक रूक्ष क्षैतिज छड़ AC, जिसके साथ वह वलय (रिंग) के द्वारा जुड़ी हुई है, पर सरक सकती है। B एवं C एक रस्सी से जुड़े हैं। जब छड़ सर्पण बिंदु पर है, तब $AC^2 - AB^2 = BC^2$ है। यदि क्षैतिज रेखा व AB के बीच का कोण θ है, तो सिद्ध कीजिए कि घर्षण गुणांक $\dfrac{\cot\theta}{2+\cot^2\theta}$ है।

One end of a heavy uniform rod AB can slide along a rough horizontal rod AC, to which it is attached by a ring. B and C are joined by a string. When the rod is on the point of sliding, then $AC^2 - AB^2 = BC^2$. If θ is the angle between AB and the horizontal line, then prove that the coefficient of friction is $\dfrac{\cot\theta}{2+\cot^2\theta}$. 10

(d) एक कण का पृथ्वी द्वारा आकर्षण बल उस कण के पृथ्वी के केन्द्र से दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती है। एक कण, जिसका भार पृथ्वी की सतह पर W है, सतह से $3h$ ऊँचाई से पृथ्वी की सतह पर गिरता है। दर्शाइए कि पृथ्वी के आकर्षण बल द्वारा किए गए कार्य का परिमाण $\dfrac{3}{4}hW$ है, जहाँ h पृथ्वी की त्रिज्या है।

The force of attraction of a particle by the earth is inversely proportional to the square of its distance from the earth's centre. A particle, whose weight on the surface of the earth is W, falls to the surface of the earth from a height $3h$ above it. Show that the magnitude of work done by the earth's attraction force is $\dfrac{3}{4}hW$, where h is the radius of the earth. 10

(e) वक्र $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$ के बिंदु (1, 1, 1) पर स्पर्श-रेखा की दिशा में फलन $xy^2 + yz^2 + zx^2$ का दिशात्मक अवकलज ज्ञात कीजिए।

Find the directional derivative of the function $xy^2 + yz^2 + zx^2$ along the tangent to the curve $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$ at the point (1, 1, 1). 10

6. (a) एक पिण्ड एक शंकु और उसके नीचे अर्धगोले से बना है। शंकु के आधार तथा अर्धगोले के शिखर का अर्धव्यास a है। पूरा पिण्ड एक रूक्ष क्षैतिज मेज पर रखा है, जिसका अर्धगोला मेज को स्पर्श करता है। दर्शाइए कि शंकु की अधिकतम ऊँचाई, जिससे कि साम्यावस्था स्थिर बनी रहे, $\sqrt{3}\,a$ है।

A body consists of a cone and underlying hemisphere. The base of the cone and the top of the hemisphere have same radius a. The whole body rests on a rough horizontal table with hemisphere in contact with the table. Show that the greatest height of the cone, so that the equilibrium may be stable, is $\sqrt{3}\,a$. 15

(b) वक्र C के चारों तरफ $\vec{F}$ का परिसंचरण ज्ञात कीजिए, जहाँ $\vec{F} = (2x + y^2)\hat{i} + (3y - 4x)\hat{j}$ और C, बिंदु (0, 0) से बिंदु (1, 1) तक वक्र $y = x^2$ के द्वारा तथा बिंदु (1, 1) से बिंदु (0, 0) तक वक्र $y^2 = x$ के द्वारा परिभाषित है।

Find the circulation of $\vec{F}$ round the curve C, where $\vec{F} = (2x + y^2)\hat{i} + (3y - 4x)\hat{j}$ and C is the curve $y = x^2$ from (0, 0) to (1, 1) and the curve $y^2 = x$ from (1, 1) to (0, 0). 15

(c) (i) अवकल समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (3\sin x - \cot x)\frac{dy}{dx} + 2y\sin^2 x = e^{-\cos x}\sin^2 x$$

को हल कीजिए।

(ii) $t^{-1/2}$ तथा $t^{1/2}$ का लाप्लास रूपांतर ज्ञात कीजिए। सिद्ध कीजिए कि $t^{n+\frac{1}{2}}$ का लाप्लास रूपांतर

$$\frac{\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\right)}{s^{n+1+\frac{1}{2}}}$$

होता है, जहाँ $n \in \mathbb{N}$.

(i) Solve the differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (3\sin x - \cot x)\frac{dy}{dx} + 2y\sin^2 x = e^{-\cos x}\sin^2 x$$ 10

(ii) Find the Laplace transforms of $t^{-1/2}$ and $t^{1/2}$. Prove that the Laplace transform of $t^{n+\frac{1}{2}}$, where $n \in \mathbb{N}$, is

$$\frac{\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\right)}{s^{n+1+\frac{1}{2}}}$$ 10

7. (a) समीकरण $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3 \sin x$ के संगत समांगी अवकल समीकरण का रेखीय स्वतंत्र हल निकालिए और तब दिए गए समीकरण का प्राचल-विचरण विधि द्वारा सामान्य हल निकालिए।

Find the linearly independent solutions of the corresponding homogeneous differential equation of the equation $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3 \sin x$ and then find the general solution of the given equation by the method of variation of parameters. 15

(b) कुंडलिनी $x = a\cos u$, $y = a\sin u$, $z = au\tan\alpha$ के लिए वक्रता की त्रिज्या तथा विमोटन की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

Find the radius of curvature and radius of torsion of the helix $x = a\cos u$, $y = a\sin u$, $z = au\tan\alpha$. 15

(c) y-अक्ष की दिशा में गतिमान एक कण का मूलबिंदु की ओर त्वरण Fy है, जहाँ F, y का एक धनात्मक एवं सम फलन है। जब कण $y = -a$ तथा $y = a$ के बीच में कंपन करता है, तब उसका आवर्तकाल T है। दर्शाइए कि

$$\frac{2\pi}{\sqrt{F_1}} < T < \frac{2\pi}{\sqrt{F_2}}$$

जहाँ F_1 एवं F_2 परास $[-a, a]$ में F के अधिकतम एवं न्यूनतम मान हैं। आगे दर्शाइए कि जब लंबाई l का एक सरल लोलक ऊर्ध्वाधर रेखा के किसी भी ओर $30°$ तक दोलन करता है, तब T, $2\pi\sqrt{l/g}$ तथा $2\pi\sqrt{l/g}\sqrt{\pi/3}$ के बीच में रहता है।

A particle moving along the y-axis has an acceleration Fy towards the origin, where F is a positive and even function of y. The periodic time, when the particle vibrates between $y = -a$ and $y = a$, is T. Show that

$$\frac{2\pi}{\sqrt{F_1}} < T < \frac{2\pi}{\sqrt{F_2}}$$

where F_1 and F_2 are the greatest and the least values of F within the range $[-a, a]$. Further, show that when a simple pendulum of length l oscillates through $30°$ on either side of the vertical line, T lies between $2\pi\sqrt{l/g}$ and $2\pi\sqrt{l/g}\sqrt{\pi/3}$. 20

8. (a) अवकल समीकरण

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left(\frac{y}{x}\right)^2 \cot^2\alpha - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^2 \operatorname{cosec}^2\alpha = 1$$

का विचित्र हल प्राप्त कीजिए। दिए हुए अवकल समीकरण का पूर्ण पूर्वग भी ज्ञात कीजिए। पूर्ण पूर्वग तथा विचित्र हल की ज्यामितीय व्याख्या कीजिए।

Obtain the singular solution of the differential equation

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left(\frac{y}{x}\right)^2 \cot^2\alpha - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^2 \operatorname{cosec}^2\alpha = 1$$

Also find the complete primitive of the given differential equation. Give the geometrical interpretations of the complete primitive and singular solution. 15

(b) एक गतिमान ग्रह का त्वरण $\frac{\mu}{(\text{दूरी})^2}$ के बराबर है और त्वरण की दिशा हमेशा एक स्थिर बिंदु (तारा) की ओर है। सिद्ध कीजिए कि उस ग्रह का पथ एक शंकु-परिच्छेद है। वे प्रतिबंध ज्ञात कीजिए, जिनके अन्तर्गत पथ *(i)* दीर्घवृत्त, *(ii)* परवलय और *(iii)* अतिपरवलय बन जाता है।

Prove that the path of a planet, which is moving so that its acceleration is always directed to a fixed point (star) and is equal to $\frac{\mu}{(\text{distance})^2}$, is a conic section. Find the conditions under which the path becomes *(i)* ellipse, *(ii)* parabola and *(iii)* hyperbola. 15

(c) (i) गाउस के अपसरण प्रमेय का कथन लिखिए। इस प्रमेय को $\vec{F} = 4x\hat{i} - 2y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$ के लिए $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ और $z = 3$ से घिरे हुए क्षेत्र में सत्यापित कीजिए।

(ii) स्टोक्स प्रमेय के द्वारा $\oint_C e^x dx + 2ydy - dz$ का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ C, वक्र $x^2 + y^2 = 4$, $z = 2$ है।

(i) State Gauss divergence theorem. Verify this theorem for $\vec{F} = 4x\hat{i} - 2y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$, taken over the region bounded by $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ and $z = 3$. 15

(ii) Evaluate by Stokes' theorem $\oint_C e^x dx + 2ydy - dz$, where C is the curve $x^2 + y^2 = 4$, $z = 2$. 5

★★★

CS (Main) Exam,2019

वियोज्य *DETACHABLE*

गणित (प्रश्न-पत्र II)

MATHEMATICS (Paper II)

निर्धारित समय : तीन घण्टे *Time Allowed : Three Hours*	*अधिकतम अंक : 250* *Maximum Marks : 250*

प्रश्न-पत्र सम्बन्धी विशेष अनुदेश

कृपया प्रश्नों के उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित प्रत्येक अनुदेश को ध्यानपूर्वक पढ़ें ।

इसमें **आठ** प्रश्न हैं जो **दो खण्डों** में विभाजित हैं तथा **हिन्दी** और **अंग्रेजी** दोनों में छपे हैं ।

परीक्षार्थी को कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर देने हैं ।

प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं तथा बाकी में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम **एक** प्रश्न चुनकर किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।

प्रत्येक प्रश्न/भाग के अंक उसके सामने दिए गए हैं ।

प्रश्नों के उत्तर उसी माध्यम में लिखे जाने चाहिए जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू.सी.ए.) पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए । उल्लिखित माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे ।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए, तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए ।

जब तक उल्लिखित न हो, संकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त हैं ।

प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी । यदि काटा नहीं हो, तो प्रश्न के उत्तर की गणना की जाएगी चाहे वह उत्तर अंशतः दिया गया हो । प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका में खाली छोड़ा हुआ पृष्ठ या उसके अंश को स्पष्ट रूप से काटा जाना चाहिए ।

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

Please read each of the following instructions carefully before attempting questions.

There are **EIGHT** questions divided in **TWO SECTIONS** and printed both in **HINDI** and in **ENGLISH**.

Candidate has to attempt **FIVE** questions in all.

Question Nos. **1** and **5** are compulsory and out of the remaining, any **THREE** are to be attempted choosing at least **ONE** question from each Section.

The number of marks carried by a question/part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in a medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless and otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meaning.

Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer Booklet must be clearly struck off.

खण्ड 'A' SECTION 'A'

1.(a) मान लीजिए कि G एक परिमित समूह है और H तथा K, G के उप-समूह हैं, ऐसा कि $K \subset H$। दर्शाइए $(G:K)=(G:H)(H:K)$ ।

Let G be a finite group, H and K subgroups of G such that $K \subset H$. Show that $(G:K)=(G:H)(H:K)$. 10

1.(b) दर्शाईए कि फलन

$$f(x, y)=\begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x-y}, & (x, y) \neq (1, -1), (1, 1) \\ 0, & (x, y)=(1, 1), (1, -1) \end{cases}$$

संतत और बिन्दु $(1,-1)$ पर अवकलनीय है ।

Show that the function

$$f(x, y)=\begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x-y}, & (x, y) \neq (1, -1), (1, 1) \\ 0, & (x, y)=(1, 1), (1, -1) \end{cases}$$

is continuous and differentiable at $(1, -1)$. 10

1.(c) मूल्यांकन कीजिए :

$$\int_0^{\infty} \frac{\tan^{-1}(ax)}{x(1+x^2)}\,dx, \quad a>0,\ a \neq 1.$$

Evaluate

$$\int_0^{\infty} \frac{\tan^{-1}(ax)}{x(1+x^2)}\,dx, \quad a>0,\ a \neq 1.$$ 10

1.(d) मान लीजिये $\mathbb{C}$ में D प्रक्षेत्र पर $f(z)$ एक विश्लेषिक फलन है और समीकरण $Im\, f(z)=(Re\, f(z))^2, Z \in D$ को संतुष्ट करता है । दर्शाइए कि D में $f(z)$ अचर है ।

Suppose $f(z)$ is analytic function on a domain D in $\mathbb{C}$ and satisfies the equation $Im\, f(z) = (Re\, f(z))^2$, $Z \in D$. Show that $f(z)$ is constant in D. 10

1.(e) ग्राफी विधि के इस्तेमाल के द्वारा रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए ।
अधिकतमीकरण कीजिए $Z = 3x_1 + 2x_2$
बशर्ते कि

$$x_1 - x_2 \geqslant 1,$$
$$x_1 + x_3 \geqslant 3$$

और $x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$

Use graphical method to solve the linear programming problem.
Maximize $Z = 3x_1 + 2x_2$
subject to

$$x_1 - x_2 \geqslant 1,$$
$$x_1 + x_3 \geqslant 3$$

and $x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$ 10

2.(a) यदि G और H परिमित समूह हैं जिनकी कोटियां सापेक्षतः अभाज्य हैं, तो सिद्ध करें कि G से H तक केवल एक ही समाकारिता होमोमोर्फिज्म है जो कि तुच्छ है ।
If G and H are finite groups whose orders are relatively prime, then prove that there is only one homomorphism from G to H, the trivial one. 10

2.(b) समूह Z_{12} के सभी विभाग समूह लिखिए ।
Write down all quotient groups of the group Z_{12}. 10

2.(c) अवकलों का उपयोग करते हुए, $f(4{\cdot}1, 4{\cdot}9)$ का सन्निकट मान ज्ञात करें, जहाँ

$$f(x, y) = \left(x^3 + x^2 y\right)^{\frac{1}{2}} \text{ है ।}$$

Using differentials, find an approximate value of $f(4{\cdot}1, 4{\cdot}9)$ where

$$f(x, y) = \left(x^3 + x^2 y\right)^{\frac{1}{2}}.$$ 15

2.(d) दर्शाइए कि वियुक्त विचित्र बिन्दु z_0, फलन $f(z)$ का m कोटि का पोल होगा यदि और केवल यदि $f(z)$ को $f(z) = \dfrac{\phi(z)}{(z - z_0)^m}$ के रूप में लिखा जा सके, जहाँ $\phi(z)$ विश्लेषिक है और z_0 पर शून्येतर है ।

इसके अलावा $\operatorname*{Res}_{z = z_0} f(z) = \dfrac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$ यदि $m \geqslant 1$ ।

Show that an isolated singular point z_0 of a function $f(z)$ is a pole of order m if and only if $f(z)$ can be written in the form $f(z) = \dfrac{\phi(z)}{(z - z_0)^m}$

where $\phi(z)$ is analytic and non zero at z_0.

Moreover $\operatorname*{Res}_{z = z_0} f(z) = \dfrac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$ if $m \geqslant 1$. 15

3.(a) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \forall x \in \mathbb{R}(-\infty, \infty)$

$$n = 1, 2, 3, ...$$

के एकसमान अभिसरण पर चर्चा करें ।

Discuss the uniform convergence of

$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \forall x \in \mathbb{R}(-\infty, \infty)$

$$n = 1, 2, 3, ...$$ 15

3.(b) एकधा विधि का इस्तेमाल करते हुए रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिये :
न्यूनतमीकरण कीजिए $Z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4$
बशर्ते कि

$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$
$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4$
और $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Solve the linear programming problem using Simplex method.
Minimize $Z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4$
subject to

$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$
$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4$
and $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ 15

3.(c) समाकल $\int_c Re(z^2)dz$ का मूल्यांकन वक्र C के साथ-साथ 0 से $2 + 4i$ तक करें, जहाँ C एक परवलय $y = x^2$ है ।

Evaluate the integral $\int_c Re(z^2)dz$ from 0 to $2 + 4i$ along the curve C where C is a parabola $y = x^2$. 10

3.(d) मानिए कि a, यूक्लिडीयन वलय R का एक अखंडनीय अवयव है तब सिद्ध करें कि $R/(a)$ एक क्षेत्र है ।
Let a be an irreducible element of the Euclidean ring R, then prove that $R/(a)$ is a field. 10

4.(a) $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$ का अधिकतम मान ज्ञात करें बशर्ते कि गौण शर्त $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$, $(x, y, z > 0)$ है ।
Find the maximum value of $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$ subject to the subsidiary condition $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$, $(x, y, z > 0)$. 15

4.(b) फलन $f(z)=\frac{1}{(e^z-1)}$ के बिन्दु $z=0$ के इर्दगिर्द लॉरेंट श्रेणी विस्तार के, प्रथम तीन पद प्राप्त करें, जो कि क्षेत्र $0<|z|<2\pi$ में वैध है ।

Obtain the first three terms of the Laurent series expansion of the function $f(z)=\frac{1}{(e^z-1)}$ about the point $z=0$ valid in the region $0<|z|<2\pi$. 10

4.(c) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{l_n x}dx$ के अभिसरण पर चर्चा कीजिए ।

Discuss the convergence of $\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{l_n x}dx$. 15

4.(d) निम्नलिखित एल. पी. पी. पर विचार करें,
अधिकतमीकरण कीजिए $Z=2x_1+4x_2+4x_3-3x_4$
बशर्ते कि
$x_1+x_2+x_3=4$
$x_1+4x_2+x_4=8$
और $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
प्रति समस्या का उपयोग करते हुए, सत्यापित करें कि बुनियादी समाधान (x_1, x_2) इष्टतम नहीं है ।

Consider the following LPP,
Maximize $Z=2x_1+4x_2+4x_3-3x_4$
subject to
$x_1+x_2+x_3=4$
$x_1+4x_2+x_4=8$
and $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
Use the dual problem to verify that the basic solution (x_1, x_2) is not optimal. 10

खण्ड 'B' SECTION 'B'

5.(a) निम्नलिखित व्यंजक :
$\psi(x^2+y^2+2z^2, y^2-2zx)=0$
के द्वारा दिए गए पृष्ठ कुल का एक आंशिक अवकल समीकरण बनायें ।
Form a partial differential equation of the family of surfaces given by the following expression :
$\psi(x^2+y^2+2z^2, y^2-2zx)=0$. 10

5.(b) न्यूटन-रेफ्सन विधि का उपयोग करते हुऐ अबीजीय (ट्रांसिडैंटल) समीकरण $x\log_{10}x=1{\cdot}2$ का वास्तविक मूल दशमलव के तीन स्थानों तक सही निकालें ।
Apply Newton-Raphson method, to find a real root of transcendental equation $x\log_{10}x=1{\cdot}2$, correct to three decimal places. 10

5.(c) एक $2a$ लम्बाई की एक एकसमान छड़ OA अपने सिरे O के इर्दगिर्द घूमने के लिये स्वतन्त्र है, जो O से ऊर्ध्वाधर OZ के परितः ω कोणीय वेग से घूमती है, और OZ से निश्चित कोण α बनाती है; α कोण का मान ज्ञात कीजिए ।

A uniform rod OA, of length $2a$, free to turn about its end O, revolves with angular velocity ω about the vertical OZ through O, and is inclined at a constant angle α to OZ; find the value of α. 10

5.(d) चौथी कोटि की रुन्गे-कुट्टा विधि का उपयोग करके $y(0)=1$ के साथ अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-x^2}{y^2+x^2}$ को $x=0{\cdot}2$ पर हल करें । परिकलन के लिये चार दशमलव स्थानों और अन्तराल लम्बाई (स्टैप लैंथ) $0{\cdot}2$ का उपयोग कीजिए ।

Using Runge-Kutta method of fourth order, solve $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-x^2}{y^2+x^2}$ with $y(0)=1$ at $x=0{\cdot}2$. Use four decimal places for calculation and step length $0{\cdot}2$. 10

5.(e) ट्रेपेजाइडल नियम के इस्तेमाल के द्वारा समाकल $y=\int_0^6 \frac{dx}{1+x^2}$ का मूल्यांकन करने के लिये, एक प्रवाह चार्ट बनाइए तथा एक बुनियादी एल्गोरिथ्म (फोर्ट्रान/C/C^{++} में) लिखें ।

Draw a flow chart and write a basic algorithm (in FORTRAN/C/C^{++}) for evaluating

$$y=\int_0^6 \frac{dx}{1+x^2}$$ using Trapezoidal rule. 10

6.(a) प्रथम कोटि रैखिककल्प आंशिक अवकल समीकरण

$x\frac{\partial u}{\partial x}+(u-x-y)\frac{\partial u}{\partial y}=x+2y$ में $x>0, -\infty<y<\infty$ को $u=1+y$ के साथ $x=1$ पर अभिलाक्षणिक विधि के द्वारा हल करें ।

Solve the first order quasilinear partial differential equation by the method of characteristics :

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+(u-x-y)\frac{\partial u}{\partial y}=x+2y \text{ in } x>0, -\infty<y<\infty \text{ with } u=1+y \text{ on } x=1.$$ 15

6.(b) अधोलिखित संख्याओं के समतुल्यों को उनके सम्मुख दरशाई गई विशिष्ट संख्या पद्धति में ज्ञात कीजिए :

(i) पूर्णांक 524 को द्विआधारी पद्धति में ।

(ii) 101010110101·101101011 को अष्टाधारी पद्धति में ।

(iii) दशमलव 5280 को षड्दशमलव पद्धति में ।

(iv) अज्ञात संख्या ज्ञात कीजिए $(1101{\cdot}101)_8 \rightarrow (?)10$ ।

Find the equivalent numbers given in a specified number to the system mentioned against them :

(i) Integer 524 in binary system.

(ii) 101010110101·101101011 to octal system.

(iii) decimal number 5280 to hexadecimal system.

(iv) Find the unknown number $(1101 \cdot 101)_8 \rightarrow (?)10$. 15

6.(c) एक त्रिज्या a तथा परिभ्रमण त्रिज्या k वाला गोलाकार सिलिन्डर बिना फिसले, एक b त्रिज्या वाले, स्थिर खोखले सिलिन्डर में लुढ़कता (roll) है । दर्शाएँ कि इनकी अक्षों में से तल एक $(b-a)\left(1+\frac{k^2}{a^2}\right)$ लम्बाई वाले गोलाकार लोलक में चलता है ।

A circular cylinder of radius a and radius of gyration k rolls without slipping inside a fixed hollow cylinder of radius b. Show that the plane through axes moves in a circular pendulum of length $(b-a)\left(1+\frac{k^2}{a^2}\right)$. 20

7.(a) हेमिल्टन समीकरण का उपयोग करते हुए, एक गोला, जो कि एक खुरदरी आनत तल (inclined plane) पर नीचे की ओर लुढ़क रहा है, का त्वरण ज्ञात करें, यदि x, तल पर निश्चित बिन्दु से गोले के सम्पर्क बिन्दु की दूरी है ।

Using Hamilton's equation, find the acceleration for a sphere rolling down a rough inclined plane, if x be the distance of the point of contact of the sphere from a fixed point on the plane. 15

7.(b) निम्नलिखित समीकरणों को गाउस-साईडल पुनरावृत्ति विधि से हल, दशमलव के सही तीन स्थानों तक करें :

$$2x + y - 2z = 17,$$
$$3x + 20y - z = -18,$$
$$2x - 3y + 20z = 25.$$

Apply Gauss-Seidel iteration method to solve the following system of equations :

$$2x + y - 2z = 17,$$
$$3x + 20y - z = -18,$$
$$2x - 3y + 20z = 25,$$ correct to three decimal places. 15

7.(c) निम्नलिखित द्वितीय कोटि के आंशिक अवकलन समीकरण को विहित रूप में समानीत करें और सामान्य हल ज्ञात करें :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial y} + 12x \text{ ।}$$

Reduce the following second order partial differential equation to canonical form and find the general solution :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial y} + 12x.$$ 20

8.(a) दिये गये बूलीय व्यंजक के लिए

$X = AB + ABC + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{C}$

(i) व्यंजक के लिये तार्किक आरेख खींचें ।

(ii) व्यंजक न्यूनतम करें ।

(iii) समानीत व्यंजक के लिये तार्किक आरेख खींचें ।

Given the Boolean expression

$X = AB + ABC + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{C}$

(i) Draw the logical diagram for the expression.

(ii) Minimize the expression.

(iii) Draw the logical diagram for the reduced expression. 15

8.(b) एक त्रिज्या R का गोला, जिसका केन्द्र स्थिर है वह घनत्व ρ के एक अनंत असंपीड्य तरल में त्रिज्यतः कंपन करता है । अगर अनंत पर दबाव Π हो, तो दर्शाएं कि गोले की सतह पर किसी समय t पर दाब

$$\Pi + \frac{1}{2}\rho\left\{\frac{d^2R^2}{dt^2} + \left(\frac{dR}{dt}\right)^2\right\} \text{ होगा ।}$$

A sphere of radius R, whose centre is at rest, vibrates radially in an infinite incompressible fluid of density ρ, which is at rest at infinity. If the pressure at infinity is Π, so that the pressure at the surface of the sphere at time t is

$$\Pi + \frac{1}{2}\rho\left\{\frac{d^2R^2}{dt^2} + \left(\frac{dR}{dt}\right)^2\right\}.$$ 15

8.(c) दो स्रोतों, प्रत्येक m शक्ति का $(-a, 0)$, $(a, 0)$ बिन्दुओं पर तथा $2m$ शक्ति का सिन्क मूल बिन्दु पर स्थित है । दर्शाएं कि धारा-रेखाएं वक्र $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2 + \lambda xy)$ हैं । यहां λ चर एक पैरामीटर है ।

और ये भी दर्शाएं कि तरल गति किसी भी बिन्दु पर $(2ma^2)/(r_1 r_2 r_3)$ है, जहां r_1, r_2, r_3 स्रोतों से और सिंक से बिन्दुओं की क्रमशः दूरिया हैं ।

Two sources, each of strength m, are placed at the points $(-a, 0)$, $(a, 0)$ and a sink of strength $2m$ at origin. Show that the stream lines are the curves $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2 + \lambda xy)$, where λ is a variable parameter.

Show also that the fluid speed at any point is $(2ma^2)/(r_1 r_2 r_3)$, where r_1, r_2 and r_3 are the distances of the points from the sources and the sink, respectively. 20