CS (Main) Exam :,2014 **C-DRN-N-OBUA**

गणित / MATHEMATICS

प्रश्न-पत्र I / Paper I

निर्धारित समय : तीन घंटे	*अधिकतम अंक : **250***
*Time allowed : **Three Hours***	*Maximum Marks : **250***

प्रश्न-पत्र के लिए विशिष्ट अनुदेश

कृपया प्रश्नों का उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित प्रत्येक अनुदेश को ध्यानपूर्वक पढ़ें :

*इसमें आठ प्रश्न हैं जो **दो खण्डों** में विभाजित हैं तथा **हिन्दी** और **अंग्रेज़ी** दोनों में छपे हैं ।*

*परीक्षार्थी को कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर देने हैं ।*

*प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं तथा बाकी में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम एक प्रश्न चुनकर किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।*

प्रत्येक प्रश्न/भाग के अंक उसके सामने दिए गए हैं ।

प्रश्नों के उत्तर उसी माध्यम में लिखे जाने चाहिए जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू.सी.ए.) पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अंकित निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए । उल्लिखित माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे ।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए, तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए ।

जब तक उल्लिखित न हो, संकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त हैं ।

प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी । यदि काटा नहीं हो, तो प्रश्न के उत्तर की गणना की जाएगी चाहे वह उत्तर अंशतः दिया गया हो । प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका में खाली छोड़ा हुआ पृष्ठ या उसके अंश को स्पष्ट रूप से काटा जाना चाहिए ।

Question Paper Specific Instructions

Please read each of the following instructions carefully before attempting questions :

*There are **EIGHT** questions divided in **TWO SECTIONS** and printed both in **HINDI** and in **ENGLISH**.*

*Candidate has to attempt **FIVE** questions in all.*

*Questions no. **1** and **5** are compulsory and out of the remaining, **THREE** are to be attempted choosing at least **ONE** from each section.*

The number of marks carried by a question / part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in a medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless and otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meaning.

Attempts of questions shall be counted in chronological order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer Booklet must be clearly struck off.

खण्ड A

SECTION A

Q1. ***सभी*** प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

Answer ***all*** the questions : *10×5=50*

(a) एक सदिश R^3 में ज्ञात कीजिए, जो कि V तथा W के प्रतिच्छेद का जनक है, जहाँ कि V एक xy समतल है तथा W सदिश (1, 2, 3) तथा सदिश (1, –1, 1) के द्वारा जनित किया गया आकाश (स्पेस) है ।

Find one vector in R^3 which generates the intersection of V and W, where V is the xy plane and W is the space generated by the vectors (1, 2, 3) and (1, –1, 1). *10*

(b) प्रारंभिक पंक्ति या स्तंभ संक्रियाओं का प्रयोग करके, आव्यूह (मैट्रिक्स)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

की कोटि ज्ञात कीजिए ।

Using elementary row or column operations, find the rank of the matrix *10*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(c) सिद्ध कीजिए कि $e^x \cos x + 1 = 0$ के दो वास्तविक मूलों के बीच $e^x \sin x + 1 = 0$ का एक वास्तविक मूल स्थित है ।

Prove that between two real roots of $e^x \cos x + 1 = 0$, a real root of $e^x \sin x + 1 = 0$ lies. *10*

(d) मूल्यांकन कीजिए :

$$\int_0^1 \frac{\log_e (1+x)}{1+x^2}\, dx$$

Evaluate : 10

$$\int_0^1 \frac{\log_e (1+x)}{1+x^2}\, dx$$

(e) परीक्षण कीजिए कि क्या समतल $x + y + z = 0$ शंकु $yz + zx + xy = 0$ को समकोणीय (लंब) रेखाओं में काटता है ।

Examine whether the plane $x + y + z = 0$ cuts the cone $yz + zx + xy = 0$ in perpendicular lines. 10

Q2. (a) मान लीजिए कि V और W निम्न उपसमष्टियाँ हैं R^4 की :

$V = \{(a, b, c, d) : b - 2c + d = 0\}$ और

$W = \{(a, b, c, d) : a = d, b = 2c\}$.

(i) V, (ii) W, (iii) $V \cap W$ का एक आधार और विस्तार ज्ञात कीजिए ।

Let V and W be the following subspaces of R^4 :

$V = \{(a, b, c, d) : b - 2c + d = 0\}$ and

$W = \{(a, b, c, d) : a = d, b = 2c\}$.

Find a basis and the dimension of (i) V, (ii) W, (iii) $V \cap W$. 15

(b) (i) λ तथा μ के मान जाँच कीजिए ताकि समीकरण $x + y + z = 6$, $x + 2y + 3z = 10$, $x + 2y + \lambda z = \mu$ का (1) कोई हल नहीं है, (2) एक अद्वितीय हल है, (3) अपरिमित हल हैं ।

Investigate the values of λ and μ so that the equations $x + y + z = 6$, $x + 2y + 3z = 10$, $x + 2y + \lambda z = \mu$ have (1) no solution, (2) a unique solution, (3) an infinite number of solutions. 10

(ii) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ के लिए कैली – हैमिल्टन प्रमेय सत्यापित कीजिए और अतएव इसका व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए । साथ ही, $A^5 - 4A^4 - 7A^3 + 11A^2 - A - 10\,I$ के द्वारा निरूपित आव्यूह भी ज्ञात कीजिए ।

Verify Cayley – Hamilton theorem for the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ and hence find its inverse. Also, find the matrix represented by $A^5 - 4A^4 - 7A^3 + 11A^2 - A - 10\,I$. 10

(c) रूपांतर $x + y = u$, $y = uv$ का प्रयोग करते हुए, समाकल $\iint \{xy\,(1 - x - y)\}^{1/2}\,dx\,dy$ का सीधी रेखाएँ $x = 0$, $y = 0$ तथा $x + y = 1$ के द्वारा परिबद्ध क्षेत्र पर मूल्यांकन कीजिए ।

By using the transformation $x + y = u$, $y = uv$, evaluate the integral $\iint \{xy\,(1 - x - y)\}^{1/2}\,dx\,dy$ taken over the area enclosed by the straight lines $x = 0$, $y = 0$ and $x + y = 1$. 15

Q3. (a) एक ऐसे महत्तम आयतन के बेलन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए जो कि a त्रिज्या के गोले के भीतर आ सके ।

Find the height of the cylinder of maximum volume that can be inscribed in a sphere of radius a. 15

(b) $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ तथा $lx + my + nz = 0$ के द्वारा प्रतिबंधित $x^2 + y^2 + z^2$ के अधिकतम या निम्नतम मान ज्ञात कीजिए । परिणाम की ज्यामितीय व्याख्या कीजिए ।

Find the maximum or minimum values of $x^2 + y^2 + z^2$ subject to the conditions $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ and $lx + my + nz = 0$. Interpret the result geometrically. 20

(c) (i) मान लीजिए कि $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$. A के आइगेन मानों और संगत आइगेन सदिशों को ज्ञात कीजिए ।

Let $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$. Find the eigen values of A and the corresponding eigen vectors. 8

(ii) सिद्ध कीजिए कि ऐकिक आव्यूह के आइगेन मानों का निरपेक्ष मान 1 होता है ।

Prove that the eigen values of a unitary matrix have absolute value 1. 7

Q4. (a) (i) गोलक $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y = 4$ के बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जिसके स्पर्शी समतल, समतल $2x - y + 2z = 1$ के समांतर हैं ।

Find the co-ordinates of the points on the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y = 4$, the tangent planes at which are parallel to the plane $2x - y + 2z = 1$. *10*

(ii) सिद्ध कीजिए कि समीकरण $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ एक शंकु निरूपित करता है, यदि $\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} = d$ हो तो ।

Prove that the equation $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$, represents a cone if $\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} = d$. *10*

(b) दर्शाइए कि उद्गम (मूल-बिन्दु) से खींची हुई रेखाएँ, जो केन्द्रीय शांकवज $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ के समतल $lx + my + nz = p$ के साथ प्रतिच्छेदन बिन्दुओं पर लम्बों के समान्तर हैं, शंकु $p^2\left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c}\right) = \left(\frac{lx}{a} + \frac{my}{b} + \frac{nz}{c}\right)^2$ का जनन करती हैं ।

Show that the lines drawn from the origin parallel to the normals to the central conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$, at its points of intersection with the plane $lx + my + nz = p$ generate the cone

$$p^2\left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c}\right) = \left(\frac{lx}{a} + \frac{my}{b} + \frac{nz}{c}\right)^2.$$ *15*

(c) अतिपरवलयज के समतल $z = 0$ के द्वारा मुख्य दीर्घवृत्तीय खण्ड $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ z = 0$ के कोई बिन्दु $(a \cos \theta,\ b \sin \theta,\ 0)$ में से दो जनक रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए ।

Find the equations of the two generating lines through any point $(a \cos \theta, b \sin \theta, 0)$, of the principal elliptic section $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ z = 0$, of the hyperboloid by the plane $z = 0$. *15*

खण्ड B

SECTION B

Q5. *सभी* प्रश्नों के उत्तर दीजिए :
Answer ***all*** the questions : *10×5=50*

(a) उचित ठहराइए कि

$$[y + x\, f(x^2 + y^2)]\, dx + [y\, f(x^2 + y^2) - x]\, dy = 0$$

की भांति अवकल समीकरण जहाँ कि $f(x^2 + y^2)$, $(x^2 + y^2)$ का एक स्वेच्छ फलन है, एक यथातथ अवकल समीकरण नहीं है तथा इसका $\frac{1}{x^2 + y^2}$ एक समाकलन गुणक है । अतएव इस अवकल समीकरण को $f(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2)^2$ के लिए हल कीजिए ।

Justify that a differential equation of the form :

$$[y + x\, f(x^2 + y^2)]\, dx + [y\, f(x^2 + y^2) - x]\, dy = 0,$$

where $f(x^2 + y^2)$ is an arbitrary function of $(x^2 + y^2)$, is not an exact differential equation and $\frac{1}{x^2 + y^2}$ is an integrating factor for it. Hence solve this differential equation for $f(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2)^2$. *10*

(b) वह वक्र ज्ञात कीजिए जिसके लिए कि स्पर्शी का भाग जो अक्षों द्वारा काटा हुआ है, स्पर्शी बिन्दु पर द्विभाजित हो ।

Find the curve for which the part of the tangent cut-off by the axes is bisected at the point of tangency. *10*

(c) एक कण एक सरल आवर्त गति (S.H.M.), केन्द्र O पर कालांक (आवर्तकाल) T, आयाम a के साथ प्रस्तुत कर रहा है तथा यह एक बिन्दु P से गुज़रता है, जहाँ कि OP = b, OP की दिशा में । सिद्ध कीजिए कि गुज़रा हुआ समय जब यह P पर वापस लौटता है, $\frac{T}{\pi} \cos^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ है ।

A particle is performing a simple harmonic motion (S.H.M.) of period T about a centre O with amplitude a and it passes through a point P, where OP = b in the direction OP. Prove that the time which elapses before it returns to P is $\frac{T}{\pi} \cos^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$. *10*

(d) दो बराबर एकसमान दंड AB तथा AC, प्रत्येक l लंबे, A पर मुक्त रूप से जुड़े हैं तथा त्रिज्या r के चिकने नियत ऊर्ध्वाधर वृत्त पर टिके हैं । यदि दंडों के बीच कोण 2θ है, तो कल्पित कार्य सिद्धांत के प्रयोग से l, r तथा θ में संबंध ज्ञात कीजिए ।

Two equal uniform rods AB and AC, each of length l, are freely jointed at A and rest on a smooth fixed vertical circle of radius r. If 2θ is the angle between the rods, then find the relation between l, r and θ, by using the principle of virtual work. *10*

(e) वक्र $\bar{r}(t) = t \cos t \ \hat{i} + t \sin t \ \hat{j}, \ 0 \le t \le 2\pi$ के किसी भी बिन्दु पर वक्रता सदिश ज्ञात कीजिए । उसका परिमाण भी बताइए ।

Find the curvature vector at any point of the curve

$\bar{r}(t) = t \cos t \ \hat{i} + t \sin t \ \hat{j}, \ 0 \le t \le 2\pi.$

Give its magnitude also. *10*

Q6. (a) प्राचलों के विचरण की विधि के द्वारा हल कीजिए :

$$\frac{dy}{dx} - 5y = \sin x$$

Solve by the method of variation of parameters : *10*

$$\frac{dy}{dx} - 5y = \sin x$$

(b) अवकल समीकरण हल कीजिए :

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 3x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + 8y = 65 \cos (\log_e x)$$

Solve the differential equation : *20*

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 3x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + 8y = 65 \cos (\log_e x)$$

(c) स्टोक्स के प्रमेय के द्वारा मूल्यांकन कीजिए :

$$\int_{\Gamma} (y \, dx + z \, dy + x \, dz)$$

जहाँ Γ वक्र है $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2ay = 0, x + y = 2a$, जो कि (2a, 0, 0) से शुरू होता है और फिर z-समतल के नीचे से होकर जाता है ।

Evaluate by Stokes' theorem

$$\int_{\Gamma} (y \, dx + z \, dy + x \, dz)$$

where Γ is the curve given by $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2ay = 0, x + y = 2a$, starting from (2a, 0, 0) and then going below the z-plane. *20*

Q7. (a) निम्नलिखित अवकल समीकरण हल कीजिए :

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - 2(x+1)\frac{dy}{dx} + (x+2)y = (x-2)e^{2x}$$

जबकि e^x इसके संगत समघात अवकल समीकरण का एक हल है ।

Solve the following differential equation :

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - 2(x+1)\frac{dy}{dx} + (x+2)y = (x-2)e^{2x},$$

when e^x is a solution to its corresponding homogeneous differential equation. *15*

(b) द्रव्यमान m का एक कण जो ऊर्ध्वाधर में एक स्थिर बिन्दु से एक हल्की अवितान्य (न खिंचने वाली) l लंबाई की डोरी से लटका हुआ है, को एक क्षैतिज आघात दिया जाता है जो कि उसको वेग $2\sqrt{gl}$ प्रदान करता है । कण का वेग तथा जब डोरी शैथिल्य हो जाए तब प्रारंभिक स्थान के स्तर से उसकी ऊँचाई ज्ञात कीजिए ।

A particle of mass m, hanging vertically from a fixed point by a light inextensible cord of length l, is struck by a horizontal blow which imparts to it a velocity $2\sqrt{gl}$. Find the velocity and height of the particle from the level of its initial position when the cord becomes slack. *15*

(c) एक सम पंचभुज (रेग्यूलर पैंटागन) ABCDE बराबर भारी एकसमान छड़ों को जोड़कर बनाया हुआ है, जोड़ A से लटक रहा है तथा BC एवं DE के मध्य बिन्दुओं को जोड़ते हुए एक हल्की छड़ के द्वारा वह अपने रूप में अनुरक्षित है । इस छड़ में प्रतिबल ज्ञात कीजिए ।

A regular pentagon ABCDE, formed of equal heavy uniform bars jointed together, is suspended from the joint A, and is maintained in form by a light rod joining the middle points of BC and DE. Find the stress in this rod. *20*

Q8. (a) अवकल समीकरण M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 के लिए पर्याप्त शर्त ज्ञात कीजिए ताकि उसका समाकलन गुणक, (x + y) का फलन हो । उस दशा में समाकलन गुणक क्या होगा ? अतएव अवकल समीकरण $(x^2 + xy)\,dx + (y^2 + xy)\,dy = 0$ का समाकलन गुणक ज्ञात कीजिए तथा हल कीजिए ।

Find the sufficient condition for the differential equation M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 to have an integrating factor as a function of (x + y). What will be the integrating factor in that case ? Hence find the integrating factor for the differential equation

$$(x^2 + xy)\,dx + (y^2 + xy)\,dy = 0,$$

and solve it. *15*

(b) एक कण पर y-अक्ष के समांतर एक बल लगा हुआ है, जिसका त्वरण (सदैव x-अक्ष की ओर) μy^{-2} है तथा जब $y = a$ है, तब x-अक्ष के समांतर वेग $\sqrt{\frac{2\mu}{a}}$ से प्रक्षेपित है । कण के पथ का प्राचलिक समीकरण ज्ञात कीजिए । यहाँ μ एक अचर है ।

A particle is acted on by a force parallel to the axis of y whose acceleration (always towards the axis of x) is μy^{-2} and when $y = a$, it is projected parallel to the axis of x with velocity $\sqrt{\frac{2\mu}{a}}$. Find the parametric equation of the path of the particle. Here μ is a constant. *15*

(c) प्रारंभिक मान समस्या

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 8\,e^{-2t}\sin t, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 0$$

को लाप्लास-रूपांतर के प्रयोग से हल कीजिए ।

Solve the initial value problem

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 8\,e^{-2t}\sin t, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 0$$

by using Laplace-transform. *20*

C–DRN–N–OBUB

गणित (प्रश्न-पत्र–II)

समय : तीन घण्टे

अधिकतम अंक : 250

प्रश्न-पत्र सम्बन्धी विशेष अनुदेश

(उत्तर देने के पूर्व निम्नलिखित निर्देशों को कृपया सावधानीपूर्वक पढ़ें)

दो खण्डों में कुल आठ प्रश्न दिए गए हैं जो **हिन्दी** एवं **अंग्रेजी** दोनों में छपे हैं।

उम्मीदवार को कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं तथा बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम **एक** प्रश्न चुनकर **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

प्रत्येक प्रश्न/भाग के लिए नियत अंक उसके सामने दिए गए हैं।

प्रश्नों के उत्तर उसी प्राधिकृत माध्यम में लिखे जाने चाहिए, जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू० सी० ए०) पुस्तिका के मुखपृष्ठ पर निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए। प्राधिकृत माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए।

जब तक उल्लिखित न हो, संकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त हैं।

प्रश्नों के प्रयासों की गणना क्रमानुसार की जाएगी। आंशिक रूप से दिए गए प्रश्नों के उत्तर को भी मान्यता दी जाएगी यदि उसे काटा न गया हो। प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका में खाली छोड़े गए कोई पृष्ठ अथवा पृष्ठ के भाग को पूर्णतः काट दीजिए।

MATHEMATICS (PAPER–II)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 250

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

(Please read each of the following instructions carefully before attempting questions)

There are EIGHT questions divided in two Sections and printed both in HINDI and in ENGLISH.

Candidate has to attempt FIVE questions in all.

Question Nos. **1** and **5** are compulsory and out of the remaining, THREE are to be attempted choosing at least ONE question from each Section.

The number of marks carried by a question/part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meanings.

Attempts of questions shall be counted in chronological order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer Booklet must be clearly struck off.

खण्ड—A / SECTION—A

1\. *(a)* मान लीजिए G सभी 2×2 के वास्तविक आव्यूहों $\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}$ का समुच्चय है, जहाँ कि $xz \neq 0$. दर्शाइए कि G आव्यूह गुणन के अन्तर्गत एक समूह है। मान लीजिए N उपसमुच्चय $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$ को द्योतित करता है। क्या N समूह G का सामान्य (नॉर्मल) उपसमूह है? अपने उत्तर का तर्क प्रस्तुत कीजिए।

Let G be the set of all real 2×2 matrices $\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}$, where $xz \neq 0$. Show that G is a group under matrix multiplication. Let N denote the subset $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$. Is N a normal subgroup of G? Justify your answer. 10

(b) अनंत समाकल $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+e^{-x})}$ के अभिसरण का परीक्षण कीजिए।

Test the convergence of the improper integral $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+e^{-x})}$. 10

(c) सिद्ध कीजिए कि फलन $f(z) = u + iv$, जहाँ

$$f(z) = \frac{x^3 (1+i) - y^3 (1-i)}{x^2 + y^2}, \; z \neq 0; \; f(0) = 0$$

मूलबिन्दु पर कौशी-रीमान समीकरणों को सन्तुष्ट करता है, परन्तु $z = 0$ पर f के अवकलज का अस्तित्व नहीं है।

Prove that the function $f(z) = u + iv$, where

$$f(z) = \frac{x^3 (1+i) - y^3 (1-i)}{x^2 + y^2}, \; z \neq 0; \; f(0) = 0$$

satisfies Cauchy-Riemann equations at the origin, but the derivative of f at $z = 0$ does not exist. 10

(d) फलन $f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)}$ का $z = 0$ तथा $z = 1$ के इर्द-गिर्द लौराँ श्रेणी में प्रसार कीजिए।

Expand in Laurent series the function $f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)}$ about $z = 0$ and $z = 1$. 10

(e) आलेखीय (ग्राफीय) विधि के द्वारा हल कीजिए :

अधिकतमीकृत कीजिए $Z = 6x_1 + 5x_2$

बशर्ते कि

$$2x_1 + x_2 \le 16$$
$$x_1 + x_2 \le 11$$
$$x_1 + 2x_2 \ge 6$$
$$5x_1 + 6x_2 \le 90$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Solve graphically :

Maximize $Z = 6x_1 + 5x_2$

subject to

$$2x_1 + x_2 \le 16$$
$$x_1 + x_2 \le 11$$
$$x_1 + 2x_2 \ge 6$$
$$5x_1 + 6x_2 \le 90$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

10

2. (a) दर्शाइए कि $\mathbb{Z}_7$ एक क्षेत्र है। तब $\mathbb{Z}_7$ में $([5]+[6])^{-1}$ तथा $(-[4])^{-1}$ ज्ञात कीजिए।

Show that $\mathbb{Z}_7$ is a field. Then find $([5]+[6])^{-1}$ and $(-[4])^{-1}$ in $\mathbb{Z}_7$. 15

(b) $\int_0^1 f(x)\,dx$ का समाकलन कीजिए, जहाँ

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & , \quad x \in \,]0, 1] \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

Integrate $\int_0^1 f(x)\,dx$, where

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & , \quad x \in \,]0, 1] \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

15

(c) निम्नलिखित परिवहन समस्या के लिए वोगेल की सन्निकटन विधि के द्वारा आरंभिक आधारिक साध्य हल ज्ञात कीजिए। इसका इष्टतम हल तथा न्यूनतम परिवहन लागत भी ज्ञात कीजिए :

		गन्तव्य				
		D_1	D_2	D_3	D_4	उपलब्धता
उद्गम	O_1	6	4	1	5	14
	O_2	8	9	2	7	16
	O_3	4	3	6	2	5
	माँग	6	10	15	4	

Find the initial basic feasible solution to the following transportation problem by Vogel's approximation method. Also, find its optimal solution and the minimum transportation cost :

		Destinations				
		D_1	D_2	D_3	D_4	Supply
Origins	O_1	6	4	1	5	14
	O_2	8	9	2	7	16
	O_3	4	3	6	2	5
	Demand	6	10	15	4	

20

3. (a) दर्शाइए कि समुच्चय $\{a + b\omega : \omega^3 = 1\}$, जहाँ a तथा b वास्तविक संख्याएँ हैं, सामान्य योग तथा गुणन के अन्तर्गत एक क्षेत्र है।

Show that the set $\{a + b\omega : \omega^3 = 1\}$, where a and b are real numbers, is a field with respect to usual addition and multiplication. 15

(b) फलन

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(3x^2 - 2y^2)}{x^2 + y^2} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

के लिए $\dfrac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x \partial y}$ तथा $\dfrac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y \partial x}$ ज्ञात कीजिए। इसके साथ, बिन्दु (0, 0) पर $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ तथा $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ के सांतत्य की भी विवेचना कीजिए।

Obtain $\dfrac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x \partial y}$ and $\dfrac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y \partial x}$ for the function

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(3x^2 - 2y^2)}{x^2 + y^2} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Also, discuss the continuity of $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ and $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ at (0, 0). 15

(c) अवशेषों का इस्तेमाल करते हुए समाकल $\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\left(1+\frac{1}{2}\cos\theta\right)^2}$ का मान निकालिए।

Evaluate the integral $\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\left(1+\frac{1}{2}\cos\theta\right)^2}$ using residues. 20

4. (a) सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $\mathbb{Q}(\sqrt{5}) = \{a + b\sqrt{5} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ तत्समक सहित एक क्रमविनिमेय वलय है।

Prove that the set $\mathbb{Q}(\sqrt{5}) = \{a + b\sqrt{5} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ is a commutative ring with identity. 15

(b) लग्रांज गुणकों की विधि के द्वारा $x^2 + y^2 + z^2$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए बशर्ते कि $xyz = a^3$.

Find the minimum value of $x^2 + y^2 + z^2$ subject to the condition $xyz = a^3$ by the method of Lagrange multipliers. 15

(c) एकधा विधि के द्वारा निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या के सभी इष्टतम हल ज्ञात कीजिए :

अधिकतमीकृत कीजिए $Z = 30x_1 + 24x_2$

बशर्ते कि

$$5x_1 + 4x_2 \le 200$$
$$x_1 \le 32$$
$$x_2 \le 40$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Find all optimal solutions of the following linear programming problem by the simplex method :

Maximize $Z = 30x_1 + 24x_2$

subject to

$$5x_1 + 4x_2 \le 200$$
$$x_1 \le 32$$
$$x_2 \le 40$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

20

खण्ड—B / SECTION—B

5\. *(a)* आंशिक अवकल समीकरण $(2D^2 - 5DD' + 2D'^2)\, z = 24(y - x)$ को हल कीजिए।

Solve the partial differential equation $(2D^2 - 5DD' + 2D'^2)\, z = 24(y - x)$. 10

(b) समीकरण $\cos x - xe^x = 0$ का, चार दशमलव स्थानों तक सही, मूल ज्ञात करने के लिए न्यूटन-रैफसन विधि का इस्तेमाल कीजिए।

Apply Newton-Raphson method to determine a root of the equation $\cos x - xe^x = 0$ correct up to four decimal places. 10

(c) समलंबी नियम के द्वारा $\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$ का समाकलन करने के लिए पाँच उपांतरालों का इस्तेमाल कीजिए।

Use five subintervals to integrate $\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$ using trapezoidal rule. 10

(d) केवल AND तथा OR तर्कसंगत द्वार इस्तेमाल करते हुए बूलीय व्यंजक $z = xy + uv$ के लिए एक तर्क परिपथ की रचना कीजिए।

Use only AND and OR logic gates to construct a logic circuit for the Boolean expression $z = xy + uv$. 10

(e) हैमिल्टन के समीकरणों का इस्तेमाल करते हुए असरल लोलक की गति का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of motion of a compound pendulum using Hamilton's equations. 10

6\. *(a)* समीकरण $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ को विहित रूप में समानीत कीजिए।

Reduce the equation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ to canonical form. 15

(b) गाउस-साइडल पुनरावृत्ति विधि के द्वारा समीकरण निकाय

$$2x_1 - x_2 = 7$$
$$-x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$$
$$-x_2 + 2x_3 = 1$$

का हल कीजिए (तीन पुनरावृत्तियाँ कीजिए)।

Solve the system of equations

$$2x_1 - x_2 = 7$$
$$-x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$$
$$-x_2 + 2x_3 = 1$$

using Gauss-Seidel iteration method (Perform three iterations). 15

(c) $x = 0 \cdot 8$ पर y का मान ज्ञात करने के लिए, जहाँ $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x+y}$, $y(0 \cdot 4) = 0 \cdot 41$ चतुष्कोटि के रुन्गे-कुट्टा फॉर्म्यूले का इस्तेमाल कीजिए। पग लंबाई $h = 0 \cdot 2$ लीजिए।

Use Runge-Kutta formula of fourth order to find the value of y at $x = 0 \cdot 8$, where $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x+y}$, $y(0 \cdot 4) = 0 \cdot 41$. Take the step length $h = 0 \cdot 2$. 20

7. (a) एक कंपमान डोरी (लम्बाई = π, स्थिर सिरे, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$) का विक्षेप ज्ञात कीजिए, यदि प्रारंभिक वेग शून्य हो और प्रारंभिक विक्षेप $f(x) = k(\sin x - \sin 2x)$ हो।

Find the deflection of a vibrating string (length = π, ends fixed, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$) corresponding to zero initial velocity and initial deflection

$$f(x) = k(\sin x - \sin 2x)$$

15

(b) सिम्प्सन के एक-तिहाई नियम के लिए एक प्रवाह-चार्ट बनाइए।

Draw a flowchart for Simpson's one-third rule. 15

(c) दत्त वेग विभव $\phi = \frac{1}{2} \log\left[\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}\right]$ के लिए प्रवाह-रेखाएँ ज्ञात कीजिए।

Given the velocity potential $\phi = \frac{1}{2} \log\left[\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}\right]$, determine the streamlines. 20

8. *(a)* हल कीजिए $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 < x < 1$, $t > 0$, दिया है कि

(i) $u(x, 0) = 0, \quad 0 \le x \le 1$

(ii) $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = x^2, \quad 0 \le x \le 1$

(iii) $u(0, t) = u(1, t) = 0$, सभी t के लिए

Solve $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 < x < 1$, $t > 0$, given that

(i) $u(x, 0) = 0, \quad 0 \le x \le 1$

(ii) $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = x^2, \quad 0 \le x \le 1$

(iii) $u(0, t) = u(1, t) = 0$, for all t 15

(b) किसी भी बूलीय चर x और y के लिए दर्शाइए कि $x + xy = x$.

For any Boolean variables x and y, show that $x + xy = x$. 15

(c) दो अनंत समांतर प्लेटों के बीच, एक श्यान असंपीड्य तरल के अपरिवर्ती स्तरीय (लैमिनर) प्रवाह के लिए, नैवियर-स्टोक्स समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find Navier-Stokes equation for a steady laminar flow of a viscous incompressible fluid between two infinite parallel plates. 20

★★★