C. S. (MAIN) EXAM, 2009

Sl. No. 402

C–DTN–J–NUA

MATHEMATICS

Paper—I

Time Allowed : Three Hours | Maximum Marks : 300

INSTRUCTIONS

Each question is printed both in Hindi and in English.

Answers must be written in the medium specified in the Admission Certificate issued to you, which must be stated clearly on the cover of the answer-book in the space provided for the purpose. No marks will be given for the answers written in a medium other than that specified in the Admission Certificate.

Candidates should attempt Question Nos. ***1*** *and* ***5*** *which are compulsory, and any* ***three*** *of the remaining questions selecting at least* ***one*** *question from each Section.*

The number of marks carried by each question is indicated at the end of the question.

Assume suitable data if considered necessary and indicate the same clearly.

Symbols/notations carry their usual meanings, unless otherwise indicated.

ध्यान दें : अनुदेशों का हिन्दी रूपान्तर इस प्रश्न-पत्र के पिछले पृष्ठ पर छपा है।

Section—A

1. Attempt any *five* of the following :

(a) Find a Hermitian and a skew-Hermitian matrix each whose sum is the matrix

$$\begin{bmatrix} 2i & 3 & -1 \\ 1 & 2+3i & 2 \\ -i+1 & 4 & 5i \end{bmatrix}$$ 12

(b) Prove that the set V of the vectors (x_1, x_2, x_3, x_4) in $\mathbb{R}^4$ which satisfy the equations $x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$ and $2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0$, is a subspace of $\mathbb{R}^4$. What is the dimension of this subspace? Find one of its bases. 12

(c) Suppose that f'' is continuous on [1, 2] and that f has three zeroes in the interval (1, 2). Show that f'' has at least one zero in the interval (1, 2). 12

(d) If f is the derivative of some function defined on $[a, b]$, prove that there exists a number $\eta \in [a, b]$, such that

$$\int_a^b f(t)\,dt = f(\eta)(b-a)$$ 12

(e) A line is drawn through a variable point on the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$ to meet two fixed lines $y = mx$, $z = c$ and $y = -mx$, $z = -c$. Find the locus of the line. 12

खण्ड—क

1. निम्नलिखित में से किन्हीं **पाँच** के उत्तर दीजिए :

(क) एक हर्मिटी और एक विषम-हर्मिटी आव्यूह मालूम कीजिए, जिनका योग निम्नलिखित आव्यूह हो : 12

$$\begin{bmatrix} 2i & 3 & -1 \\ 1 & 2+3i & 2 \\ -i+1 & 4 & 5i \end{bmatrix}$$

(ख) सिद्ध कीजिए कि $\mathbb{R}^4$ में सदिशों (x_1, x_2, x_3, x_4) का ऐसा सेट V, जो समीकरणों $x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$ और $2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0$ को संतुष्ट करता हो, $\mathbb{R}^4$ की एक उपसमष्टि है। इस उपसमष्टि का क्या आमाप है? इसका एक आधार ज्ञात कीजिए। 12

(ग) मान लीजिए कि $[1, 2]$ पर f'' संतत है और अंतराल $(1, 2)$ में f के तीन शून्य हैं। दर्शाइए कि अंतराल $(1, 2)$ में f'' का कम-से-कम एक शून्य है। 12

(घ) यदि $[a, b]$ पर परिभाषित किसी फलन का अवकलज f है, तो साबित कीजिए कि एक ऐसी संख्या $\eta \in [a, b]$ मौजूद है, ताकि

$$\int_a^b f(t)\, dt = f(\eta)(b-a)$$

12

(ङ) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ z = 0$ पर एक परिवर्ती बिन्दु में से एक रेखा दो नियत रेखाओं $y = mx,\ z = c$ और $y = -mx,\ z = -c$ को मिलाने के लिए खींची जाती है। उस रेखा के बिन्दुपथ को ज्ञात कीजिए। 12

(f) Find the equation of the sphere having its centre on the plane $4x - 5y - z = 3$, and passing through the circle

$$x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 3y + 4z + 8 = 0$$
$$3x + 4y - 5z + 3 = 0$$ 12

2. (a) Let $\mathscr{B} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ and $\mathscr{B}' = \{(2, 1, 1), (1, 2, 1), (-1, 1, 1)\}$ be the two ordered bases of $\mathbb{R}^3$. Then find a matrix representing the linear transformation $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ which transforms $\mathscr{B}$ into $\mathscr{B}'$. Use this matrix representation to find $T(\bar{x})$, where $\bar{x} = (2, 3, 1)$. 20

(b) If $x = 3 \pm 0 \cdot 01$ and $y = 4 \pm 0 \cdot 01$, with approximately what accuracy can you calculate the polar coordinates r and θ of the point $P(x, y)$? Express your estimates as percentage changes of the values that r and θ have at the point (3, 4). 20

(c) Find a 2×2 real matrix A which is both orthogonal and skew-symmetric. Can there exist a 3×3 real matrix which is both orthogonal and skew-symmetric? Justify your answer. 20

3. (a) Let $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ be a linear transformation defined by

$L((x_1, x_2, x_3, x_4))$
$$= (x_3 + x_4 - x_1 - x_2,\ x_3 - x_2,\ x_4 - x_1)$$

Then find the rank and nullity of L. Also, determine null space and range space of L. 20

(च) एक ऐसे गोलक का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसका केन्द्र समतल $4x - 5y - z = 3$ पर हो और जो वृत्त

$$x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 3y + 4z + 8 = 0$$
$$3x + 4y - 5z + 3 = 0$$

में से गुज़र रहा हो। 12

2. (क) लीजिए $\mathscr{B} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ और $\mathscr{B}' = \{(2, 1, 1), (1, 2, 1), (-1, 1, 1)\}$ दो क्रमित आधार हैं $\mathbb{R}^3$ के। तब एक आव्यूह को मालूम कीजिए, जो एक ऐसे रैखिक रूपांतरण $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ का निरूपण करता हो जो $\mathscr{B}$ को $\mathscr{B}'$ में रूपांतरित कर दे। इस आव्यूह निरूपण का $T(\bar{x})$ को ज्ञात करने के लिए इस्तेमाल कीजिए, जहाँ $\bar{x} = (2, 3, 1)$ हो। 20

(ख) यदि $x = 3 \pm 0 \cdot 01$ और $y = 4 \pm 0 \cdot 01$ हो, तो आप बिन्दु $P(x, y)$ के ध्रुवीय निर्देशांकों r और θ का लगभग कितनी परिशुद्धता के साथ परिकलन कर सकते हैं? आप अपने प्राक्कलनों को उन मानों के प्रतिशतता परिवर्तनों के रूप में व्यक्त कीजिए, जो बिन्दु (3, 4) पर r और θ के हों। 20

(ग) एक ऐसे 2×2 वास्तविक आव्यूह A को मालूम कीजिए, जो लाम्बिक और विषम-सममित दोनों हो। क्या कोई 3×3 वास्तविक आव्यूह भी हो सकता है, जो लाम्बिक और विषम-सममित दोनों हो? अपने उत्तर के पक्ष में दलीलें पेश कीजिए। 20

3. (क) लीजिए $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ एक ऐसा रैखिक रूपांतरण है, जो

$$L((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (x_3 + x_4 - x_1 - x_2,\ x_3 - x_2,\ x_4 - x_1)$$

से परिभाषित हो। तब L की कोटि और शून्यता को मालूम कीजिए। साथ ही L की शून्य समष्टि और परिसर समष्टि का भी निर्धारण कीजिए। 20

(b) Let $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be defined as

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Is f continuous at $(0, 0)$? Compute partial derivatives of f at any point (x, y), if exist. 20

(c) A space probe in the shape of the ellipsoid $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$ enters the earth's atmosphere and its surface begins to heat. After one hour, the temperature at the point (x, y, z) on the probe surface is given by

$$T(x, y, z) = 8x^2 + 4yz - 16z + 600$$

Find the hottest point on the probe surface. 20

4. (a) Prove that the set V of all 3×3 real symmetric matrices forms a linear subspace of the space of all 3×3 real matrices. What is the dimension of this subspace? Find at least one of the bases for V. 20

(b) Evaluate

$$I = \iint_S x\,dy\,dz + dz\,dx + xz^2\,dx\,dy$$

where S is the outer side of the part of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ in the first octant. 20

(ख) लीजिए $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ निम्नलिखित के रूप में परिभाषित है :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{यदि } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{यदि } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

क्या (0, 0) पर f संतत है? किसी बिन्दु (x, y) पर f के आंशिक अवकलजों का परिकलन कीजिए, यदि उनका अस्तित्व हों। 20

(ग) दीर्घवृत्तज $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$ की आकृति का एक अंतरिक्ष अन्वेषण-यान पृथ्वी के वायुमंडल में प्रवेश करता है और उसका पृष्ठ गर्म होने लगता है। एक घंटे के बाद, अन्वेषण-यान के पृष्ठ पर बिन्दु (x, y, z) पर ताप

$$T(x, y, z) = 8x^2 + 4yz - 16z + 600$$

द्वारा दत्त है। अन्वेषण-यान के पृष्ठ पर सबसे ज्यादा गर्म बिन्दु ज्ञात कीजिए। 20

4. (क) सिद्ध कीजिए कि सभी 3×3 वास्तविक सममित आव्यूहों के सेट V, सभी 3×3 वास्तविक आव्यूहों के समष्टि का रैखिक उपसमष्टि बनाते हैं। इस उपसमष्टि का आमाप क्या है? V के लिए कम-से-कम एक आधार ज्ञात कीजिए। 20

(ख) $I = \iint_S x\,dy\,dz + dz\,dx + xz^2\,dx\,dy$ का मूल्यांकन कीजिए, जहाँ S पहले अष्टांशक में गोलक $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ के भाग का बाहरी पार्श्व हो। 20

(c) Prove that the normals from the point (α, β, γ) to the paraboloid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$ lie on the cone

$$\frac{\alpha}{x-\alpha} + \frac{\beta}{y-\beta} + \frac{a^2 - b^2}{z-\gamma} = 0$$ 20

Section—B

5. Attempt any *five* of the following :

(a) A body is describing an ellipse of eccentricity e under the action of a central force directed towards a focus and when at the nearer apse, the centre of force is transferred to the other focus. Find the eccentricity of the new orbit in terms of the eccentricity of the original orbit. 12

(b) Find the Wronskian of the set of functions

$$\{3x^3, |3x^3|\}$$

on the interval $[-1, 1]$ and determine whether the set is linearly dependent on $[-1, 1]$. 12

(c) A uniform rod AB is movable about a hinge at A and rests with one end in contact with a smooth vertical wall. If the rod is inclined at an angle of 30° with the horizontal, find the reaction at the hinge in magnitude and direction. 12

(ग) सिद्ध कीजिए कि बिन्दु (α, β, γ) से परवलयज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$ पर अभिलम्ब, शंकु

$$\frac{\alpha}{x-\alpha} + \frac{\beta}{y-\beta} + \frac{a^2 - b^2}{z-\gamma} = 0$$

पर स्थित होते हैं। 20

खण्ड—ख

5. निम्नलिखित में से किन्हीं **पाँच** के उत्तर दीजिए :

(क) कोई पिंड किसी नाभि की ओर दिशित एक केन्द्रीय बल की क्रिया के अधीन उत्केन्द्रता e का एक दीर्घवृत्त बना रहा है और जब वह पास की स्तम्भिका पर होता है, तब बल का केन्द्र अन्य नाभि पर स्थानांतरित हो जाता है। नई कक्षा की उत्केन्द्रता को मूल कक्षा की उत्केन्द्रता के रूप में ज्ञात कीजिए। 12

(ख) अंतराल $[-1, 1]$ पर फलनों के सेट $\{3x^3, |3x^3|\}$ का रौंस्कीय ज्ञात कीजिए और निर्धारण कीजिए कि क्या सेट, $[-1, 1]$ पर रैखिकतः निर्भर है अथवा नहीं है। 12

(ग) एक एकसमान छड़ AB, बिन्दु A पर हिंज के इर्दगिर्द गतिशील है और उसका एक सिरा एक चिकने ऊर्ध्वाधर दीवार के सम्पर्क में टिका हुआ है। यदि छड़ क्षितिज के साथ $30°$ के कोण पर अभिनत हो, तो हिंज पर प्रतिक्रिया को परिमाण और दिशा में ज्ञात कीजिए। 12

(d) A shot fired with a velocity V at an elevation α strikes a point P in a horizontal plane through the point of projection. If the point P is receding from the gun with velocity v, show that the elevation must be changed to θ, where

$$\sin 2\theta = \sin 2\alpha + \frac{2v}{V} \sin \theta$$

12

(e) Show that

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} r^n) = n(n+1)r^{n-2}$$

where $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 12

(f) Find the directional derivative of—

(i) $4xz^3 - 3x^2y^2z^2$ at $(2, -1, 2)$ along z-axis;

(ii) $x^2yz + 4xz^2$ at $(1, -2, 1)$ in the direction of $2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$. 6+6

6. (a) Find the differential equation of the family of circles in the xy-plane passing through $(-1, 1)$ and $(1, 1)$. 20

(b) Find the inverse Laplace transform of

$$F(s) = \ln\left(\frac{s+1}{s+5}\right)$$

20

(c) Solve : 20

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2(x-y)}{3xy^2 - x^2y - 4y^3}, \quad y(0) = 1$$

(घ) वेग V के साथ और उन्नतांश α पर दागी गई गोली, प्रक्षेपण बिन्दु के बीच से गुज़रती हुई क्षैतिज समतल में बिन्दु P पर वार करती है। यदि बिन्दु P बन्दूक से वेग v के साथ दूर होता जा रहा हो, तो दर्शाइए कि उन्नतांश को θ में परिवर्तित करना आवश्यक होगा, जहाँ

$$\sin 2\theta = \sin 2\alpha + \frac{2v}{V} \sin\theta$$ 12

(ङ) दर्शाइए कि

$$\text{div}(\text{grad } r^n) = n(n+1)r^{n-2}$$

जहाँ $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 12

(च) निम्नलिखित के दिक्-अवकलज ज्ञात कीजिए : 6+6

(i) z-अक्ष के साथ-साथ (2, −1, 2) पर $4xz^3 - 3x^2y^2z^2$ का

(ii) $2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$ की दिशा में (1, −2, 1) पर $x^2yz + 4xz^2$ का

6. (क) (−1, 1) और (1, 1) में से गुज़रते हुए xy-समतल में वृत्त-कुल के अवकल समीकरण को ज्ञात कीजिए। 20

(ख) $F(s) = \ln\left(\frac{s+1}{s+5}\right)$ का प्रतिलोम लाप्लास रूपांतर ज्ञात कीजिए। 20

(ग) हल कीजिए : 20

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2(x-y)}{3xy^2 - x^2y - 4y^3}, \quad y(0) = 1$$

7. *(a)* One end of a light elastic string of natural length l and modulus of elasticity $2mg$ is attached to a fixed point O and the other end to a particle of mass m. The particle initially held at rest at O is let fall. Find the greatest extension of the string during the motion and show that the particle will reach O again after a time

$$(\pi + 2 - \tan^{-1} 2)\sqrt{\frac{2l}{g}}$$

20

(b) A particle is projected with velocity V from the cusp of a smooth inverted cycloid down the arc. Show that the time of reaching the vertex is

$$2\sqrt{\frac{a}{g}}\cot^{-1}\left(\frac{V}{2\sqrt{ag}}\right)$$

where a is the radius of the generating circle. 10

(c) On a rigid body, the forces $10(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$ N, $5(-2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$ N and $6(2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$ N are acting at points with position vectors $\hat{i} - \hat{j}$, $2\hat{i} + 5\hat{k}$ and $4\hat{i} - \hat{k}$ respectively. Reduce this system to a single force $\vec{R}$ acting at the point $(4\hat{i} - 2\hat{j})$ together with a couple $\vec{G}$ whose axis passes through this point. Does the point $(4\hat{i} + 2\hat{j})$ lie on the central axis? 15

7. (क) प्रकृत लम्बाई l और प्रत्यास्थता गुणांक $2mg$ वाली एक हल्की प्रत्यास्थ डोरी का एक सिरा नियत बिन्दु O पर जुड़ा हुआ है और दूसरा सिरा द्रव्यमान m के एक कण के साथ जुड़ा है। शुरू में O पर विरामावस्था में रखे हुए कण को गिरने दिया जाता है। गति के दौरान डोरी का अधिकतम विस्तार ज्ञात कीजिए और दर्शाइए कि कण, समय

$$(\pi + 2 - \tan^{-1} 2)\sqrt{\frac{2l}{g}}$$

के बाद, फिर से O पर पहुँच जाएगा। 20

(ख) एक मसृण प्रतिलोमित चक्रज के कस्प से एक कण को वेग V के साथ चाप के नीचे की ओर प्रक्षेपित किया जाता है। दर्शाइए कि शीर्ष तक पहुँचने का समय

$$2\sqrt{\frac{a}{g}}\cot^{-1}\left(\frac{V}{2\sqrt{ag}}\right)$$

होगा, जहाँ a जनक वृत्त की त्रिज्या है। 10

(ग) एक दृढ़ पिंड पर उन बिन्दुओं पर बल $10(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$ N, $5(-2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$ N और $6(2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$ N कार्य कर रहे हैं, जिनकी स्थिति सदिश क्रमशः $\hat{i} - \hat{j}$, $2\hat{i} + 5\hat{k}$ और $4\hat{i} - \hat{k}$ हैं। इस निकाय को ऐसे एकल बल $\vec{R}$ पर समानयन कीजिए, जो बिन्दु $(4\hat{i} + 2\hat{j})$ पर युग्म $\vec{G}$ के साथ कार्य कर रहा हो, जिसका अक्ष इस बिन्दु के बीच से गुज़रता हो। क्या बिन्दु $(4\hat{i} + 2\hat{j})$ केन्द्रीय अक्ष पर अवस्थित है? 15

(d) Find the length of an endless chain which will hang over a circular pulley of radius a so as to be in contact with three-fourth of the circumference of the pulley. 15

8. (a) Find the work done in moving the particle once round the ellipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1,\ z=0$ under the field of force given by

$$\vec{F}=(2x-y+z)\hat{i}+(x+y-z^2)\hat{j}+(3x-2y+4z)\hat{k}$$

20

(b) Using divergence theorem, evaluate

$$\iint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}$$

where $\vec{A}=x^3\hat{i}+y^3\hat{j}+z^3\hat{k}$ and S is the surface of the sphere $x^2+y^2+z^2=a^2$. 20

(c) Find the value of

$$\iint_S (\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot d\vec{S}$$

taken over the upper portion of the surface $x^2+y^2-2ax+az=0$ and the bounding curve lies in the plane $z=0$, when

$$\vec{F}=(y^2+z^2-x^2)\hat{i}+(z^2+x^2-y^2)\hat{j}+(x^2+y^2-z^2)\hat{k}$$

20

(घ) एक ऐसे सिराहीन चेन की लम्बाई ज्ञात कीजिए, जो त्रिज्या a की एक वृत्तीय घिरनी पर इस प्रकार लटकी होगी कि वह घिरनी की परिधि के तीन-चौथाई के सम्पर्क में हो। 15

8. (क) $$\vec{F} = (2x - y + z)\hat{i} + (x + y - z^2)\hat{j} + (3x - 2y + 4z)\hat{k}$$

द्वारा प्रदत्त बल-क्षेत्र के अधीन दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, $z = 0$ के चारों ओर कण के एक बार घूमने में किए गए कार्य को मालूम कीजिए। 20

(ख) अपसरण प्रमेय का इस्तेमाल करते हुए $\iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$ का मान निकालिए, जहाँ $\vec{A} = x^3\hat{i} + y^3\hat{j} + z^3\hat{k}$ हो और S गोलक $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ का पृष्ठ हो। 20

(ग) पृष्ठ $x^2 + y^2 - 2ax + az = 0$ के ऊपरी भाग पर लिए गए और सीमक वक्र के समतल $z = 0$ में स्थित होने पर $\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$ का मान ज्ञात कीजिए, जब

$$\vec{F} = (y^2 + z^2 - x^2)\hat{i} + (z^2 + x^2 - y^2)\hat{j} + (x^2 + y^2 - z^2)\hat{k}$$

20

★ ★ ★

C–DTN–J–NUA

गणित

प्रश्न-पत्र—I

समय : तीन घण्टे | पूर्णांक : 300

अनुदेश

प्रत्येक प्रश्न हिन्दी और अंग्रेजी दोनों में छपा है।

प्रश्नों के उत्तर उसी माध्यम में लिखे जाने चाहिए जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख उत्तर-पुस्तक के मुख-पृष्ठ पर अंकित निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए। प्रवेश-पत्र पर उल्लिखित माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे।

*प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं। बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम **एक** प्रश्न चुनकर किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।*

प्रत्येक प्रश्न के लिए नियत अंक प्रश्न के अन्त में दिए गए हैं।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए।

प्रतीक/संकेत प्रचलित अर्थों में प्रयुक्त हैं, अन्यथा निर्दिष्ट हैं।

Note : English version of the Instructions is printed on the front cover of this question paper.

Serial No. 0407

C–DTN–J–NUB

MATHEMATICS

Paper—II

Time Allowed : Three Hours | *Maximum Marks : 300*

INSTRUCTIONS

Each question is printed both in Hindi and in English.

Answers must be written in the medium specified in the Admission Certificate issued to you, which must be stated clearly on the cover of the answer-book in the space provided for the purpose. No marks will be given for the answers written in a medium other than that specified in the Admission Certificate.

*Candidates should attempt Questions **1** and **5** which are compulsory, and any **three** of the remaining questions selecting at least **one** question from each Section.*

Assume suitable data if considered necessary and indicate the same clearly.

Symbols and notations carry usual meaning, unless otherwise indicated.

All questions carry equal marks.

ध्यान दें : अनुदेशों का हिन्दी रूपान्तर इस प्रश्न-पत्र के पिछले पृष्ठ पर छपा है ।

SECTION—A

1. Attempt any **FIVE** of the following : (12×5=60)

(a) If $\mathbb{R}$ is the set of real numbers and $\mathbb{R}_+$ is the set of positive real numbers, show that $\mathbb{R}$ under addition $(\mathbb{R}, +)$ and $\mathbb{R}_+$ under multiplication $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ are isomorphic. Similarly if $\mathbb{Q}$ is the set of rational numbers and $\mathbb{Q}_+$ the set of positive rational numbers, are $(\mathbb{Q}, +)$ and $(\mathbb{Q}_+, \cdot)$ isomorphic ? Justify your answer. 4+8=12

(b) Determine the number of homomorphisms from the additive group $\mathbb{Z}_{15}$ to the additive group $\mathbb{Z}_{10}$. ($\mathbb{Z}_n$ is the cyclic group of order n). 12

(c) State Rolle's theorem. Use it to prove that between two roots of $e^x \cos x = 1$ there will be a root of $e^x \sin x = 1$. 2+10=12

(d) Let $$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{2} + 1 & \text{if} \quad x < 1 \\ \frac{x}{2} + 1 & \text{if} \quad 1 \le x < 2 \\ -\frac{|x|}{2} + 1 & \text{if} \quad 2 \le x \end{cases}$$

What are the points of discontinuity of f, if any ? What are the points where f is not differentiable, if any ? Justify yours answers. 12

(Contd.)

खंड—'क'

1. निम्नलिखित में से किन्हीं **पांच** के उत्तर दीजिए : (12×5=60)

(क) यदि $\mathbb{R}$ वास्तविक संख्याओं का सैट हो, और $\mathbb{R}_+$ धनात्मक वास्तविक संख्याओं का सैट हो, दर्शाइये कि $\mathbb{R}$ योग के अधीन $(\mathbb{R}, +)$ और $\mathbb{R}_+$ गुणन के अधीन $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ तुल्यकारी होते हैं। इसी के समान, यदि $\mathbb{Q}$ परिमेय संख्याओं का सैट हो और $\mathbb{Q}_+$ धनात्मक परिमेय संख्याओं का सैट, तो क्या $(\mathbb{Q}, +)$ और $(\mathbb{Q}_+, \cdot)$ भी तुल्यकारी हैं ? अपने उत्तर के पक्ष में दलीलें दीजिए। 4+8=12

(ख) योज्य समूह $\mathbb{Z}_{15}$ से योज्य समूह $\mathbb{Z}_{10}$ तक समाकारिताओं की संख्याओं का निर्धारण कीजिए। ($\mathbb{Z}_n$ कोटि n का चक्रीय समूह है) 12

(ग) रोले के प्रमेय का कथन कीजिए। यह साबित करने के लिए कि $e^x \cos x = 1$ के दो मूलों के बीच में $e^x \sin x = 1$ का एक मूल होगा, इस प्रमेय का इस्तेमाल कीजिए। 2+10=12

(घ) लीजिए $f(x)=\begin{cases} \frac{|x|}{2}+1 & \text{यदि } x<1 \\ \frac{x}{2}+1 & \text{यदि } 1\le x<2 \\ -\frac{|x|}{2}+1 & \text{यदि } 2\le x \end{cases}$

f के असांतत्य के कौन से बिंदु हैं, यदि कोई हों तो ? कौन से ऐसे बिंदु हैं, जहाँ f अवकलनीय नहीं है, यदि कोई हों तो ? अपने उत्तरों के पक्ष में दलीलें दीजिए। 12

(e) Let $f(z) = \dfrac{a_0 + a_1 z + \ldots\ldots + a_{n-1} z^{n-1}}{b_0 + b_1 z + \ldots\ldots + b_n z^n}$, $b_n \neq 0$.

Assume that the zeroes of the denominator are simple. Show that the sum of the residues of f(z) at its poles is equal to $\dfrac{a_{n-1}}{b_n}$. 12

(f) A paint factory produces both interior and exterior paint from two raw materials M_1 and M_2. The basic data is as follows :

	Tons of raw material per ton of		**Maximum daily availability**
	Exterior paint	**Interior paint**	
Raw Material M_1	6	4	24
Raw Material M_2	1	2	6
Profit per ton (Rs. 1,000)	5	4	

A market survey indicates that the daily demand for interior paint cannot exceed that of exterior paint by more than 1 ton. The maximum daily demand of interior paint is 2 tons. The factory wants to determine the optimum product mix of interior and exterior paint that maximizes daily profits. Formulate the LP problem for this situation. 12

(च) लीजिए $f(z)=\frac{a_0+a_1z+........+a_{n-1}z^{n-1}}{b_0+b_1z+........+b_nz^n}$, $b_n \neq 0$.

मानिए कि हर के शून्य सरल हैं। दर्शाइए कि f(z) के अवशेषों का उसके ध्रुवों पर योग $\frac{a_{n-1}}{b_n}$ के बराबर होता है। 12

(छ) पेंट का एक कारखाना दो कच्चे मालों M_1 और M_2 से आंतरिक और बाह्य दोनों पेंटों का उत्पादन करता है। बुनियादी आंकड़े निम्नलिखित अनुसार हैं :

	प्रति टन पर कच्चे माल के टन		**अधिकतम दैनिक उपलब्धता**
	बाह्य पेंट	**आंतरिक पेंट**	
कच्चा माल M_1	6	4	24
कच्चा माल M_2	1	2	6
प्रति टन मुनाफा (1,000 रु.)	5	4	

बाज़ार सर्वेक्षण से पता चला है कि आंतरिक पेंट की दैनिक मांग, बाह्य पेंट से 1 टन से ज्यादा नहीं हो सकती है। आंतरिक पेंट की अधिकतम दैनिक मांग 2 टन है। कारखाना आंतरिक और बाह्य पेंटों के ऐसे इष्टतम उत्पाद-मिश्रण का निर्धारण करना चाहता है कि जिससे दैनिक मुनाफे अधिक से अधिक हो सकें। इस स्थिति के लिए LP समस्या का विरचन कीजिए। 12

2. (a) How many proper, non-zero ideals does the ring Z_{12} have ? Justify your answer. How many ideals does the ring $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{12}$ have ? Why ?

2+3+4+6=15

(b) Show that the alternating group on four letters A_4 has no subgroup of order 6. 15

(c) Show that the series :

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 6}\right)^2 + \ldots\ldots\ldots + \left(\frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots\ldots (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \ldots\ldots 3n}\right)^2 + \ldots\ldots$$

converges. 15

(d) Show that if $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ is a continuous function then $f([a, b]) = [c, d]$ for some real numbers c and d, $c \leq d$. 15

3. (a) Show that $\mathbb{Z}[X]$ is a unique factorization domain that is not a principal ideal domain ($\mathbb{Z}$ is the ring of integers). Is it possible to give an example of principal ideal domain that is not a unique factorization domain ? ($\mathbb{Z}$ [X] is the ring of polynomials in the variable X with integer.) 15

2. (क) वलय Z_{12} के उचित, गैर-शून्य आदर्श कितने होते हैं ? अपने उत्तर के पक्ष में तर्क दीजिए। वलय $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{12}$ के कितने आदर्श होते हैं ? क्यों ? 2+3+4+6=15

(ख) दर्शाइए कि चार अक्षरों A_4 पर एकांतर समूह का कोटि 6 का कोई उप-समूह नहीं है। 15

(ग) दर्शाइए कि श्रेणी :

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1\cdot4}{3\cdot6}\right)^2 + \ldots\ldots\ldots + \left(\frac{1\cdot4\cdot7\ldots\ldots(3n-2)}{3\cdot6\cdot9\ldots\ldots\ldots3n}\right)^2 + \ldots\ldots\ldots$$

अभिसरित होती है। 15

(घ) दर्शाइए कि यदि $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ एक संतत फलन हो, तो कुछ वास्तविक संख्याओं c और d, $c \leq d$ के लिए $f([a, b]) = [c, d]$। 15

3. (क) दर्शाइए कि $\mathbb{Z}[X]$ एक ऐसा अद्वितीय गुणनखंडन प्रांत है, जो मुख्य गुणजावली प्रांत नहीं है ($\mathbb{Z}$ पूर्णांकों का वलय है)। क्या किसी ऐसे मुख्य गुणजावली प्रांत का उदाहरण देना संभव है, जो अद्वितीय गुणनखंडन प्रांत न हो ? ($\mathbb{Z}$ [X] पूर्णांक सहित चर X में बहुपदों का वलय है।) 15

(b) How many elements does the quotient ring $\frac{\mathbb{Z}_5[X]}{(X^2+1)}$ have ? Is it an integral domain ? Justify yours answers. 15

(c) Show that :

$$\underset{x \to 1}{\text{Lt}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^2}{n^4 + x^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + 1} .$$

Justify all steps of your answer by quoting the theorems you are using. 15

(d) Show that a bounded infinite subset of $\mathbb{R}$ must have a limit point. 15

4. (a) If α, β, γ are real numbers such that $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ show that :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\alpha + \beta\cos\theta + \gamma\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2}} .$$

30

(b) Maximize : $Z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3$

subject to :

$2x_1 + 3x_2 \leq 8,$

$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 15,$

$2x_2 + 5x_3 \leq 10,$

$x_i \geq 0.$ 30

(ख) विभाग वलय $\frac{\mathbb{Z}_5[X]}{(X^2+1)}$ के कितने अवयव होते हैं ? क्या यह एक पूर्णांकीय प्रांत है ? अपने उत्तरों के पक्ष में तर्क दीजिए। 15

(ग) दर्शाइए कि :

$$\underset{x \to 1}{\mathrm{Lt}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^2}{n^4 + x^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + 1}.$$

आप जिन प्रमेयों का इस्तेमाल कर रहे हैं, उनके उद्धरण देकर, अपने उत्तर के सभी कदमों के पक्ष में दलीलें दीजिए। 15

(घ) दर्शाइए कि $\mathbb{R}$ के परिबद्ध अनंत उपसमुच्चय का एक सीमा बिंदु होना जरूरी होता है। 15

4\. (क) यदि α, β, γ ऐसी वास्तविक संख्याएं हों कि $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$, तो दर्शाइए कि :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\alpha + \beta\cos\theta + \gamma\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2}}.$$

30

(ख) $Z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3$ को अधिकतमीकृत कीजिए, बशर्ते कि :

$2x_1 + 3x_2 \le 8,$

$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 15,$

$2x_2 + 5x_3 \le 10,$

$x_i \ge 0.$ 30

SECTION—B

5. Answer any **FIVE** of the following : (12×5=60)

(a) Show that the differential equation of all cones which have their vertex at the origin is $px + qy = z$. Verify that this equation is satisfied by the surface $yz + zx + xy = 0$. 12

(b) (i) Form the partial differential equation by eliminating the arbitrary function f given by :

$$f(x^2 + y^2, z - xy) = 0.$$ 6

(ii) Find the integral surface of :

$$x^2p + y^2q + z^2 = 0$$

which passes through the curve :

$$xy = x + y, z = 1.$$ 6

(c) (i) The equation $x^2 + ax + b = 0$ has two real roots α and β. Show that the iterative method given by :

$$x_{k+1} = -(a\, x_k + b)/x_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots\ldots$$

is convergent near $x = \alpha$, if $|\alpha| > |\beta|$. 6

खंड—'ख'

5. निम्नलिखित में से किन्हीं **पांच** के उत्तर दीजिए : (12×5=60)

(क) दर्शाइए कि उन सभी शंकुओं का, जिनके शीर्ष उद्गम पर होते हैं, अवकल समीकरण $px + qy = z$ होता है। सत्यापित कीजिए कि यह समीकरण पृष्ठ $yz + zx + xy = 0$ के द्वारा संतुष्ट होता है। 12

(ख) (i) $f(x^2 + y^2, z - xy) = 0$

के द्वारा दत्त स्वेच्छ फलन f को विलुप्त करने के द्वारा, आंशिक अवकल समीकरण बनाइए। 6

(ii) $x^2p + y^2q + z^2 = 0$

का समाकल पृष्ठ मालूम कीजिए, जो वक्र

$xy = x + y, z = 1$

में से गुज़रता हो। 6

(ग) (i) समीकरण $x^2 + ax + b = 0$ के दो वास्तविक मूल α और β हैं। दर्शाइए कि :

$$x_{k+1} = -(a\,x_k + b)/x_k,\ k = 0, 1, 2, ...$$

के द्वारा दत्त पुनरावृत्तिमूलक विधि $x = \alpha$, के निकट अभिसारी है, यदि $|\alpha| > |\beta|$. 6

(ii) Find the values of two valued boolean variables A, B, C, D by solving the following simultaneous equations :

$$\bar{A} + AB = 0$$

$$AB = AC$$

$$AB + A\bar{C} + CD = \bar{C}D$$

where $\bar{x}$ denotes the complement of x. 6

(d) (i) Realize the following expression by using NAND gates only :

$$g = (\bar{a} + \bar{b} + c)\,\bar{\bar{d}}\,(\bar{a} + e)\,f$$

where $\bar{x}$ denotes the complement of x. 6

(ii) Find the decimal equivalent of $(357 \cdot 32)_8$. 6

(e) The flat surface of a hemisphere of radius r is cemented to one flat surface of a cylinder of the same radius and of the same material. If the length of the cylinder be l and the total mass be m, show that the moment of inertia of the combination about the axis of the cylinder is given by :

$$mr^2\left(\frac{l}{2} + \frac{4}{15}r\right)\Big/\left(l + \frac{2r}{3}\right).$$ 12

(ii) निम्नलिखित युगपत् समीकरणों :

$$\bar{A} + AB = 0$$

$$AB = AC$$

$$AB + A\bar{C} + CD = \bar{C}D$$

को हल करने के द्वारा दो मानांकित बूलीय चरों A, B, C, D के मानों को मालूम कीजिए, जहाँ $\bar{x}$ द्योतित करता है x के पूरक को। 6

(घ) (i) केवल 'तथा पूरक द्वारों' का इस्तेमाल करते हुए, निम्नलिखित व्यंजक का प्रापण कीजिए :

$$g = (\bar{a} + \bar{b} + c)\,\bar{d}\,(\bar{a} + e)\,f$$

जहाँ $\bar{x}$ द्योतित करता है x के पूरक को। 6

(ii) $(357{\cdot}32)_8$ का दशमलव तुल्य मालूम कीजिए। 6

(च) त्रिज्या r के अर्धगोले के चपटे पृष्ठ को उसी त्रिज्या और उसी पदार्थ से बने एक सिलिंडर के एक चपटे पृष्ठ के साथ चिपकाया हुआ है। यदि सिलिंडर की लंबाई *l* और कुल द्रव्यमान m हो, तो दर्शाइए कि संयोजन का सिलिंडर के अक्ष के इर्दगिर्द जडत्व आघूर्ण निम्नलिखित द्वारा दत्त है :

$$mr^2\left(\frac{l}{2} + \frac{4}{15}r\right)\Big/\left(l + \frac{2r}{3}\right).$$ 12

(f) Two sources, each of strength m are placed at the points (–a, 0), (a, 0) and a sink of strength 2 m is at the origin. Show that the stream lines are the curves :

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2 + \lambda xy)$$

where λ is a variable parameter.

Show also that the fluid speed at any point is $(2ma^2)/(r_1 r_2 r_3)$, where r_1, r_2 and r_3 are the distances of the points from the sources and the sink. 12

6. (a) Find the characteristics of :

$$y^2 r - x^2 t = 0$$

where r and t have their usual meanings. 15

(b) Solve :

$$(D^2 - DD' - 2D'^2)z = (2x^2 + xy - y^2) \sin xy - \cos xy$$

where D and D' represent $\frac{\partial}{\partial x}$ and $\frac{\partial}{\partial y}$. 15

(c) A tightly stretched string has its ends fixed at $x = 0$ and $x = l$. At time $t = 0$, the string is given a shape defined by $f(x) = \mu x(l - x)$, where μ is a constant, and then released. Find the displacement of any point x of the string at time $t > 0$. 30

(छ) दो स्रोतों को, प्रत्येक m सामर्थ्य का, बिंदुओं $(-a, 0)$, $(a, 0)$ पर रखा हुआ है और सामर्थ्य 2 m का एक सिंक उद्गम पर स्थापित है। दर्शाइए कि धारा रेखाएं वक्र हैं :

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2 + \lambda xy)$$

जहाँ λ एक परिवर्ती प्राचल है।

यह भी दर्शाइए कि किसी भी बिंदु पर तरल रफ़्तार $(2ma^2)/(r_1 r_2 r_3)$ है, जहाँ r_1, r_2 और r_3 स्रोतों और सिंक से बिंदुओं की दूरियां हैं। 12

6. (क) $y^2 r - x^2 t = 0$

के अभिलक्षण मालूम कीजिए जहाँ r और t के अपने सामान्य अर्थ हैं। 15

(ख) हल कीजिए :

$$(D^2 - DD' - 2D'^2)z = (2x^2 + xy - y^2) \sin xy - \cos xy$$

जहाँ D और D' निरूपित करते हैं $\frac{\partial}{\partial x}$ और $\frac{\partial}{\partial y}$ को। 15

(ग) मजबूती के साथ खिंचे हुए एक रज्जू के सिरे $x = 0$ और $x = l$ पर जुड़े हुए हैं। समय $t = 0$ पर, रज्जू को $f(x) = \mu x(l - x)$ के द्वारा परिभाषित आकृति दी जाती है, जहाँ μ एक नियतांक है और उसके बाद रज्जू को ढीला छोड़ा जाता है। समय $t > 0$ पर रज्जू के किसी भी बिंदु x का विस्थापन मालूम कीजिए। 30

7. (a) Develop an algorithm for Regula-Falsi method to find a root of f(x) = 0 starting with two initial iterates x_0 and x_1 to the root such that sign $(f(x_0)) \neq$ sign $(f(x_1))$. Take n as the maximum number of iterations allowed and eps be the prescribed error. 30

(b) Using Lagrange interpolation formula, calculate the value of f(3) from the following table of values of x and f(x) :

x	0	1	2	4	5	6
f(x)	1	14	15	5	6	19

15

(c) Find the value of y(1·2) using Runge-Kutta fourth order method with step size h = 0·2 from the initial value problem :

$y' = xy$

$y(1) = 2.$ 15

8. (a) A perfectly rough sphere of mass m and radius b, rests on the lowest point of a fixed spherical cavity of radius a. To the highest point of the movable sphere is attached a particle of mass m' and the

7. (क) मूल पर दो आरंभिक पुनरावृत्तों x_0 और x_1 से शुरू करते हुए, $f(x) = 0$ का एक मूल मालूम करने के लिए, मिथ्या स्थिति (रेगुला-फाल्सी) विधि के लिए, एक ऐल्गोरिथ्म का विकास कीजिए, ताकि साइन $(f(x_0)) \neq$ साइन $(f(x_1))$। लीजिए n अनुमत्य पुनरावृत्तियों की अधिकतम संख्या और eps निर्धारित त्रुटि। 30

(ख) लग्रांज अंतर्वेशन फार्मूला का इस्तेमाल करते हुए, x और f(x) के मानों की निम्नलिखित सारणी से, f(3) के मान का परिकलन कीजिए :

x	0	1	2	4	5	6
f(x)	1	14	15	5	6	19

15

(ग) आरंभिक मान समस्या :

$$y' = xy$$

$$y(1) = 2$$

से पग आकार $h = 0{\cdot}2$ के साथ रंगे-कुट्टा चतुष्कोटि विधि का इस्तेमाल करते हुए, $y(1{\cdot}2)$ का मान मालूम कीजिए। 15

8. (क) द्रव्यमान m और त्रिज्या b का एक पूर्णतः खुरदरा गोलक, त्रिज्या a के एक नियत गोलाकार कोटर के निम्नतम बिंदु पर टिका हुआ है। गतिशील गोलक के उच्चतम बिंदु पर

system is disturbed. Show that the oscillations are the same as those of a simple pendulum of length

$$(a-b)\frac{4\,m' + \frac{7}{5}\,m}{m + m'\left(2 - \frac{a}{b}\right)}.$$ 30

(b) An infinite mass of fluid is acted on by a force $\frac{\mu}{r^{3/2}}$ per unit mass directed to the origin. If initially the fluid is at rest and there is a cavity in the form of the sphere r = C in it, show that the cavity will be filled up after an interval of time $\left(\frac{2}{5\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot C^{\frac{5}{4}}$.

30

द्रव्यमान m' का एक कण जुड़ा हुआ है। तंत्र को हिलाया जाता है। दर्शाइए कि दोलन वही हैं, जो लंबाई

$$(a-b)\frac{4\,m'+\frac{7}{5}m}{m+m'\left(2-\frac{a}{b}\right)}$$ के सरल लोलक के हुआ

करते हैं। 30

(ख) तरल की एक अपरिमित संहति पर, प्रति इकाई संहति, बल $\frac{\mu}{r^{3/2}}$ लगा हुआ है, जिसकी दिशा उद्‌गम की ओर है। यदि आरंभ में तरल विरामावस्था में हो और उसमें गोलक r = C के रूप में एक कोटर हो, तो दर्शाइए कि समय $\left(\frac{2}{5\mu}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot C^{\frac{5}{4}}$ के अंतराल के बाद कोटर भर जाएगा।

30

Serial No. C–DTN–J–NUB

गणित

प्रश्न-पत्र—II

समय : तीन घण्टे | पूर्णांक : 300

अनुदेश

प्रत्येक प्रश्न हिन्दी और अंग्रेजी दोनों में छपा है।

प्रश्नों के उत्तर उसी माध्यम में लिखे जाने चाहिए जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख उत्तर-पुस्तक के मुखपृष्ठ पर अंकित निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए। प्रवेश-पत्र पर उल्लिखित माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं दिये जाएंगे।

*प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं। बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम **एक** प्रश्न चुनकर किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।*

यदि आवश्यक हो तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए।

प्रतीकों और संकेतनों के प्रचलित अर्थ हैं, जब तक अन्यथा न कहा गया हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

***Note** : English version of the Instructions is printed on the front cover of this question paper.*